Exercices sur les formes sesquilinéaires

DÉFINITIONS

Exercice 1 (Formes très dégénérées)**.**

Déterminer toutes les formes sesquilinéaires symétriques, anti-symétriques et hermitiennes f sur un espace E avec $dimE = dimKerf + 1$.

Exercice 2 (Isotropes)**.**

(1) Montrer que si un sous-espace d'un espace non-singulier (E, f) est totalement isotrope, il est de dimension inférieure à $\dim E/2$.

(2) Déterminer des vecteurs isotropes et un sous-espace totalement isotrope maximal pour les formes non dégénérées suivantes (données par leur forme quadratique). Dans chaque cas, on donnera l'indice, c'est à dire la dimension des sous-espaces totalement isotropes maximaux.

  (a) $k = \mathbb{R} : q = x^2 + y^2, x^2 - y^2, x^2 + y^2 - z^2, x^2 + y^2 + z^2 - t^2, x^2 + y^2 - z^2 - t^2$.

  (b) $k = \mathbb{C} : q = x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2$.

Exercice 3.

(1) Déterminer si possible un plan totalement isotrope pour chacune des formes bilinéaires symétriques données par les formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{C}^4$.

$$P(x, y, z, t) = xy + zt \text{ et } Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

(2) L'entier -3 est-il un carré modulo 7 ?

(3) Déterminer si possible un vecteur non-nul isotrope pour chacune des formes bilinéaires symétriques données par les formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{F}_7^4$.

$$R(x, y, z, t) = xy + zt \text{ et } S(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

DÉCOMPOSITION ET CLASSIFICATION

Exercice 4.

Donner l'exemple de deux formes bilinéaires avec même rang, même indice et même discriminant mais non-équivalentes.

Exercice 5.

Les formes bilinéaires symétriques données par les formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{F}_7^3$ sont-elles équivalentes ?

$$q(x, y, z) = x^2 + 6y^2 + 2z^2 \text{ et } Q(x, y, z) = xy + 3z^2.$$

Exercice 6.

(1) Quels sont les sous-espace propres de la matrice J de taille $n \times n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 ?

(2) Diagonaliser dans une base orthonormée pour le produit scalaire standard, la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$. Discuter son rang et sa signature.

$$f(x, y) = \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} x_i y_j + x_j y_i.$$

Exercice 7 (En caractéristique 2)**.**

Soit g la forme bilinéaire symétrique sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que g est non dégénérée. Peut-on compléter e_1 en une base orthogonale ?

Exercice 8 (Espace de matrices)**.**

Soit $E := M_n(\mathbb{R})$. Déterminer la signature des formes quadratiques

(1) $q_1(A) = trace(A^2)$. On cherchera des “grands” sous-espaces où q_1 est définie positive ou définie négative.

(2) $q_2(A) = trace(A^2) - (trace A)^2$.

Théorème de Witt

Exercice 9.

Soit $(E, q(xe_1 + ye_2) = 2xy)$ un plan hyperbolique orienté. Peut-on prolonger l'application u définie sur $vect(e_1)$ par $u(e_1) = e_2$ en une isométrie de E ? En une isométrie directe de E ?

Exercice 10.

Démontrer le théorème de Witt dans le cas particulier suivant :

Soit E et E' deux espaces symplectiques non-singuliers de dimension 4. Soit $d \subset E$ et $d' \subset E'$ deux droites et f une application linéaire bijective de d sur d'. Montrer qu'il existe une isométrie de E sur E' qui prolonge f.

Exercice 11 (Action des groupes orthogonaux)**.**

Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de la forme quadratique $q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ non dégénérée de signature $(1, 1)$. Le groupe $O(1, 1)$ est par définition le groupe des isométries de (E, q).

(1) Le groupe $O(1, 1)$ agit-il transitivement sur les droites de $\mathbb{R}^2$?

(2) Soit q une forme quadratique réelle non dégénérée. Montrer que si q a la même signature en restriction à F et à F' alors F et F' sont dans la même orbite sous l'action de $O(q)$.

(3) Décrire les orbites de l'action de $O(2, 1)$ sur les droites de $\mathbb{R}^3$.

Géométrie projective

Exercice 12 (Droites et quadriques)**.**

Une quadrique d'un espace projectif $P(V)$ est le lieu des zéros d'une forme quadratique f sur V.

(1) Montrer que toute quadrique qui contient trois points distincts d'une droite d contient toute la droite d.

(2) Déterminer la dimension de l'espace des quadriques de $P^3(K)$.

(3) Soit d_1, d_2, d_3 trois droites de $P^3(K)$. Montrer qu'il existe une quadrique qui les contient.

Exercice 13 (Polarité)**.**

Soit $\mathcal{Q}$ une quadrique de $P(E)$ (muni d'un repère projectif) d'équation $q(x) = 0$ où q est la forme quadratique d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée f sur un espace vectoriel E. Si $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont deux sous-espaces orthogonaux dans E, on note $P(\overrightarrow{A}) \perp P(\overrightarrow{B})$. On appelle hyperplan polaire d'un point $A = P(\overrightarrow{A})$ de $P(E)$ l'hyperplan projectif $A^\perp := P(\overrightarrow{A}^\perp)$.

(1) On munit de plan projectif d'un repère. Déterminer une équation de la droite polaire du point $M(x_0, y_0, 1)$ par rapport à la quadrique d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. La représenter dans l'espace affine d'équation $z \neq 0$.

(2) Soit F un sous-espace non-isotrope de E. Soit A et B deux points de $P(F)$. Montrer si $A \perp B$ pour f alors $A \perp B$ pour $f_{|F}$.

(3) Soit $\mathcal{Q}$ une quadrique de $P^1(K)$ dont l'image est composée des deux points A et B. Montrer en utilisant un bon repère que pour tout M in $P^1(K)$,

$$M \perp N \iff M \text{ et } N \text{ sont conjugués harmoniques par rapport à } M \text{ et } N.$$

(4) En déduire une construction géométrique de la polaire d'un point par rapport à une conique.

Groupes orthogonaux, unitaires et symplectiques

Exercice 14.

Montrer sans calcul que la matrice suivante A à coefficients complexes est inversible

$$A = \begin{bmatrix} 1-i & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -i & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1-i & -1 \\ 3 & 0 & -1 & -i \end{bmatrix}$$

Exercice 15.

Déterminer l'orbite et le stabilisateur d'un vecteur de norme 1 sous l'action du groupe orthogonal du produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que groupe $O(n-1)$ est isomorphe à un sous-groupe O_{n-1} de $O(n)$. Ce sous-groupe est-il distingué ?

Exercice 16 (Décomposition polaire d'un endomorphisme)**.**

Soit H un espace hermitien et a un endomorphisme inversible de H. Montrer que a s'écrit de façon unique sous la forme $a = hu$ où h est un endomorphisme auto-adjoint positif et u unitaire. Déterminer h et u pour l'endomorphisme a dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$ est $\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$.

Exercice 17 (Involutions)**.**

Soit f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur un espace vectoriel E.

(1) Soit $u \in GL(E)$ une involution. Montrer que u est orthogonale si et seulement si $E_+(u) = E_+ := Ker(u - Id)$ et $E_- := Ker(u + Id)$ sont orthogonaux. Montrer alors que $(E_+)^\perp = E_-$ et que E_+ n'est pas isotrope.

(2) Soit $F \subset E$ un sous-espace non isotrope. Montrer qu'il existe une unique involution orthogonale telle que $E_+(u) = F$.

(3) Montrer que $O(f) \equiv SO(f) \ltimes \{-1, 1\}$.

Exercice 18 (Dilatations)**.**

Soit f une forme sesquilinéaire non dégénérée. Déterminer les dilatations orthogonales (resp. unitaires. resp. symplectiques.

Exercice 19.

Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soit E un k-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et ϕ une forme sesquilinéaire non dégénérée sur E symétrique, hermitienne ou alternée. Soit τ une transvection de E donnée à l'aide d'une forme linéaire non nulle f sur E et un vecteur a de $Kerf$ par $\forall x \in E, \tau(x) = x + f(x)a$.

(1) On suppose désormais que τ est une isométrie relativement à ϕ. Montrer que a est isotrope.

(2) Montrer que f et $\phi(\cdot, a)$ sont proportionnelles. On notera $\lambda \in k^\star$ tel que $f = \lambda\phi(\cdot, a)$.

(3) Montrer que si $\sigma \neq Id$ et ϕ est hermitienne ou symétrique, alors $\lambda + \sigma(\lambda) = 0$.

(4) Montrer qu'il n'existe pas de transvections orthogonales, qu'il existe des transvections unitaires si et seulement si l'indice est plus grand que 1 et qu'il existe toujours des transvections symplectiques.

Exercice 20 (Sur les similitudes)**.**

Soit f une forme sesquilinéaire non dégénérée symétrique (resp. hermitienne, alternée) sur un K-espace vectoriel E. On note $GO(f)$ (resp. $GU(f)$, $GSp(f)$) le groupe des similitudes de f. On note μ l'application qui à une similitude associe son multiplicateur dans $K^\star$.

(1) Déterminer les similitudes de la forme symplectique standard sur K^2.

(2) Montrer que u est une similitude si et seulement si elle conserve l'orthogonalité.

(3) On suppose f symétrique. Montrer que $Im(\mu) = \{\lambda \in K^\star / q \equiv \lambda q\} \supset (K^\star)^2$.

Exercice 21 (Etude du groupe orthogonal $O(1,1)$)**.**

(1) Montrer que dans un plan d'Artin il y a exactement deux droites isotropes I et J.

(2) Soit $u \in O(1,1)$. Montrer que u envoie $I \cup J$ sur lui-même.

(3) Soit $u \in O(1,1)$. Montrer que u est directe si et seulement si u laisse fixes chaque droite isotrope.

(4) En déduire la forme des éléments de $O(1,1)$.

Exercice 22.

On considère la forme symplectique sur $\mathbb{R}^{2n}$ donnée par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = x^t\, y' - y^t\, x'$$

où x, y, x', y' sont dans $\mathbb{R}^n$.

(1) En décomposant par bloc $n \times n$ une matrice quelconque g de $M_{2n}(\mathbb{R})$ sous la forme $\left(\begin{smallmatrix} AB \\ CD \end{smallmatrix}\right)$, caractériser les matrices symplectiques en termes de systèmes d'équation pour A, B, C, D.

(2) Déterminer toutes les matrices symplectiques vérifiant de plus $B = C = 0$.

(3) Déterminer toutes les matrices symplectiques vérifiant $A = D = I_n$ et $C = 0$.

(4) Déterminer toutes les matrices symplectiques vérifiant $C = 0$.

(5) Déterminer toutes les matrices Q de $M_n(\mathbb{R})$ telles que l'espace $W_Q := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} Qy \\ y \end{smallmatrix}\right) / y \in \mathbb{R}^n \right\}$ soit totalement isotrope. Quel est le lien avec les questions précédentes ?