



Théorie des groupes et géométrie

Examen (seconde session)

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses. Les résultats du cours peuvent être utilisés sans démonstrations. Il est bon de relire sa copie...

Durée : 2 heures

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1

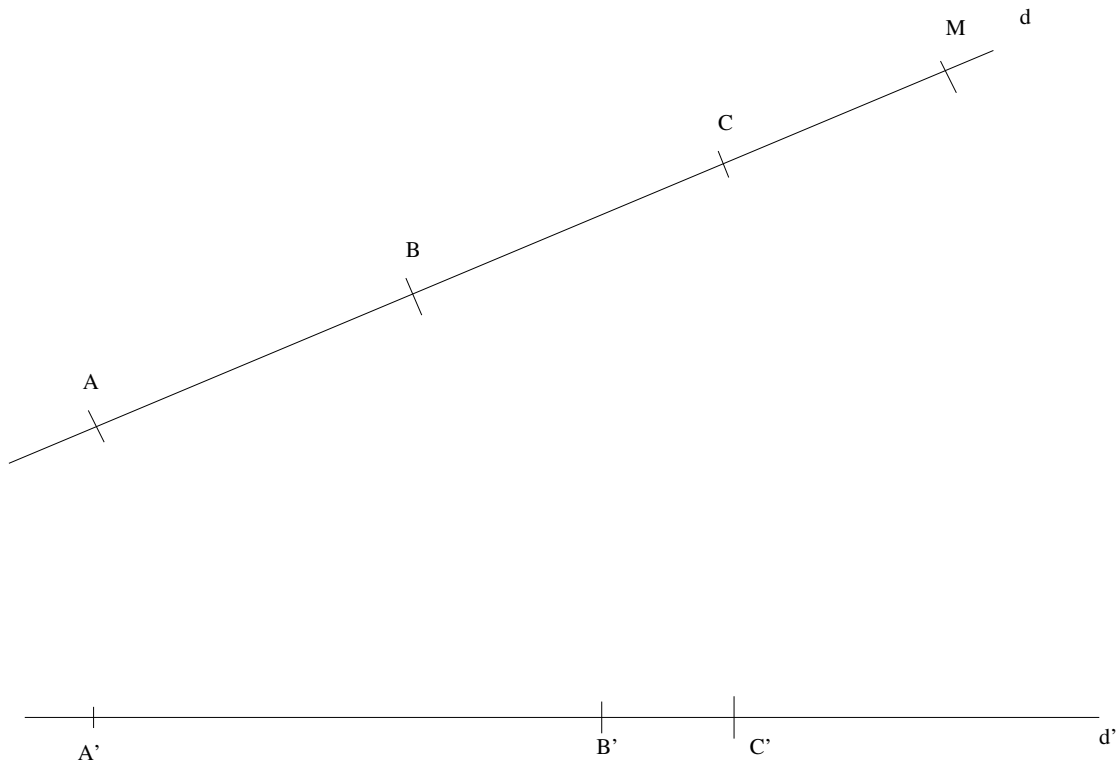
(4 points)

Soit D_8 le groupe des isométries du carré. Déterminer un morphisme injectif de groupes de D_8 dans \mathfrak{S}_4 . Les éléments $(1, 3)$ et $(1, 2, 3, 4)$ engendrent-ils le groupe symétrique \mathfrak{S}_4 ?

Exercice 2

(3 points)

Soit H une homographie entre deux droites d et d' du plan P^2 qui envoie A sur A' , B sur B' et C sur C' . Construire l'image M' de M par H .



Exercice 3

(5 points)

- 1 Quel est le cardinal de l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^N$ de dimension N sur le corps \mathbb{F}_q ?
- 2 Déterminer une action transitive et fidèle de $PGL(2, \mathbb{F}_5)$ sur un ensemble à 6 éléments.
- 3 En déduire un sous-groupe H d'indice 6 de \mathfrak{S}_6 non conjugué à $S(1) := \{\sigma \in \mathfrak{S}_6, \sigma(1) = 1\}$.

Exercice 4

(4 points)

Montrer qu'en dimension 2 le groupe symplectique d'une forme alternée non dégénérée est isomorphe au groupe spécial linéaire $SL(2, k)$.

Exercice 5

(5 points)

- 1 Les formes bilinéaires symétriques données par les formes quadratiques suivantes sur \mathbb{F}_7^3 sont-elles équivalentes ?

$$q(x, y, z) = x^2 + 6y^2 + 2z^2$$

et

$$Q(x, y, z) = xy + 4z^2.$$

- 2 Montrer que deux formes quadratiques équivalentes sur un espace E prennent les mêmes valeurs dans k .
- 3 La forme q prend-elle toutes les valeurs de \mathbb{F}_7 ? Vérifier qu'elle prend les valeurs 3 et 5.

Un corrigé sera disponible sur internet.