Théorie des groupes et géométrie

Examen (seconde session) (corrigé)

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses. Les résultats du cours peuvent être utilisés sans démonstrations. Il est bon de relire sa copie...

Durée : 2 heures

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (4 points)

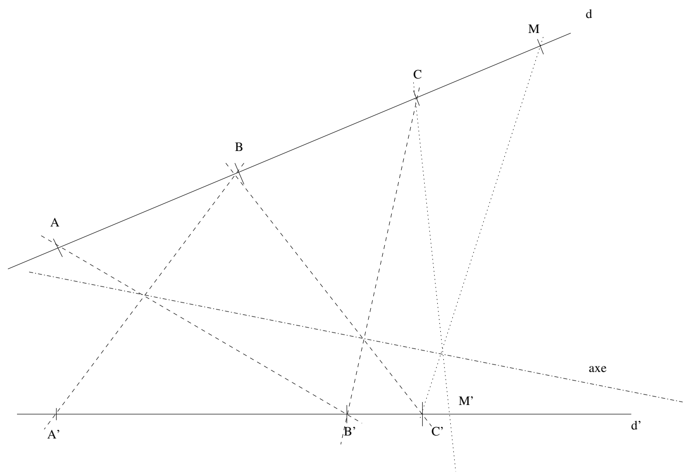
Soit D_8 le groupe des isométries du carré. Déterminer un morphisme injectif de groupes de D_8 dans $\mathfrak{S}_4$. Les éléments $(1,3)$ et $(1,2,3,4)$ engendrent-ils le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$?

Solution : On considère l'action de D_8 sur les 4 sommets du carré. Comme trois de ces quatre sommets forment un repère affine, l'action est fidèle et le morphisme associé injectif. Mais le morphisme n'est pas surjectif. Comme les deux éléments $(1,3)$ et $(1,2,3,4)$ sont dans l'image, par symétrie axiale et rotation, ils n'engendrent pas tout $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 2 (3 points)

Soit H une homographie entre deux droites d et d' du plan P^2 qui envoie A sur A', B sur B' et C sur C'. Construire l'image M' de M.

Solution :



Exercice 3 (5 points)

1 Quel est le cardinal de l'espace projectif $\mathbb{P}^N_{\mathbb{F}_q}$ de dimension N sur le corps $\mathbb{F}_q$?

Solution : Cet espace paramètre les droites vectorielles de $\mathbb{F}_q^{N+1}$. Il a donc

$$\frac{q^{N+1}-1}{q-1} = 1 + q + q^2 + \cdots q^N$$

points. On retrouve ici la décomposition en réunion d'esapces affines.

2 Déterminer une action transitive et fidèle de $PGL(2, \mathbb{F}_5)$ sur un ensemble à 6 éléments.

Solution : Considérons l'action naturelle sur $P(\mathbb{F}_5^2)$ l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{F}_5^2$. Cet ensemble a $(5^2-1)/(5-1) = 6$ points. L'action est transitive comme l'est celle du groupe linéaire $GL(2, \mathbb{F}_5)$ sur $\mathbb{F}_5^2$ et fidèle car le centre de $GL(2, \mathbb{F}_5)$ est l'ensemble des isomorphismes linéaires qui conservent chaque droite.

3 En déduire un sous-groupe H d'indice 6 de $\mathfrak{S}_6$ non conjugué à $S(1) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_6, \sigma(1) = 1\}$.

Solution : Considérons l'image H du morphisme associé à l'action précédente. C'est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_6$ d'ordre $(5^2-1)(5^2-5)/4 = 120$ donc d'indice 6 dans $\mathfrak{S}_6$. Les sous-groupes conjugués à $S(1)$ sont les $S(i)$ stabilisateur de i. Comme l'action précédente est transitive, aucun i n'est stabilisé par tout H (il n'y a pas d'orbite à 1 élément). Ainsi le sous-groupe H d'indice 6 n'est pas conjugué à $S(1)$.

Exercice 4 (4 points)

Montrer qu'en dimension 2 le groupe symplectique d'une forme alternée non dégénérée est isomorphe au groupe spécial linéaire $SL(2, k)$.

Solution : On se met dans une base pour laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifie ${}^tTMT = M$, si et seulement si $ad - bc = 1$.

Exercice 5 (5 points)

1 Les formes bilinéaires symétriques données par les formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{F}_7^3$ sont-elles équivalentes ?

$$q(x, y, z) = x^2 + 6y^2 + 2z^2$$

et

$$Q(x, y, z) = xy + 4z^2.$$

Solution : Les formes bilinéaires symétriques données par les formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{F}_7^3$, q et Q ont pour matrice dans la base canonique

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & \\ 4 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 4 & \end{pmatrix}$$

et sont non-dégénérées de discriminant 5 et -1. Comme $(5)^{\frac{7-1}{2}} = (-1)^{\frac{7-1}{2}} = -1$ aucun des deux discriminant n'est un carré et les formes sont donc équivalentes.

2 Montrer que deux formes quadratiques équivalentes sur un espace E prennent les mêmes valeurs dans k.

Solution : Si q et Q sont équivalents, il existe un isomorphisme linéaire u de E tel que $Q = q \circ u$. Par conséquent Q prend toutes les valeurs que prend q.

3 La forme q prend-elle toutes les valeurs de $\mathbb{F}_7$? Vérifier qu'elle prend les valeurs 3 et 5.

Solution : Comme $Q(1, y, 0) = y$ prend toutes les valeurs de $\mathbb{F}_7$ et comme q et Q sont équivalentes, q prend toutes les valeurs de $\mathbb{F}_7$.

$$3 = 10 = 2^2 + 6 \times 1^2 + 6 \times 0^2 \qquad 5 = 12 = 2^2 + 6 \times 1^2 + 2 \times 1^2.$$