Exercices sur le groupe symétrique et le groupe linéaire

GROUPES ABÉLIENS

Exercice 1 (Théorème de Sylow pour les groupes abéliens finis)**.**

Soit $G = \{a_1, a_2, \cdots a_n\}$ un groupe fini. On note α_i l'ordre de l'élément a_i. Soit p un diviseur premier de $\mid G \mid$ l'ordre de G.

(1) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{Z}/\alpha_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\alpha_2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/\alpha_n\mathbb{Z} & \rightarrow & G \\ & & (\overline{h_1}, \overline{h_2}, \cdots, \overline{h_n}) & \mapsto & a_1^{h_1} a_2^{h_2} \cdots a_n^{h_n} \end{array}$$

est une application bien définie. Démontrer que c'est un homomorphisme de groupes puis qu'il est surjectif.

(2) En déduire que p divise $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n$.

(3) Montrer qu'il y a dans G un élément d'ordre p.

(4) En raisonnant par récurrence sur l'ordre du groupe et en considérant l'ensemble $G/ < x >$ où x est un élément d'ordre p dans G, montrer que G admet un p-Sylow.

(5) Montrer qu'un groupe abélien est simple si et seulement s'il est cyclique, d'ordre un nombre premier.

Exercice 2.

(1) Soit G un groupe, a et b deux éléments d'ordre fini qui commutent. On suppose que les sous-groupes engendrés $< a >$ et $< b >$ ont une intersection réduite au singleton élément neutre $\{e\}$.

(2) Montrer qu'une égalité $(ab)^m = e$ implique $a^m = e$ et $b^m = e$.

(3) Calculer l'ordre de ab.

(4) Montrer que si deux éléments d'un groupe ont des ordres premiers entre eux, l'intersection des sous-groupes qu'ils engendrent est réduite au singleton élément neutre.

(5) Montrer que tout groupe abélien d'ordre 77 est cyclique.

SOUS-GROUPES DISTINGUÉS

Exercice 3.

(1) Soit $f : \mathfrak{S}_n \rightarrow A$ un homomorphisme de groupes de $\mathfrak{S}_n$ vers un groupe abélien. Démontrer que les transpositions ont toutes même image. Démontrer que si $A = \{1, -1\}$ $f = signature$ ou $f =$ application constante1.

(2) Soit G d'indice 2 dans $\mathfrak{S}_n$. Démontrer que G est distingué (reprendre la méthode de la feuille 1) puis que $G = \mathfrak{A}_n$.

Exercice 4 (Les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$)**.**

Le but de l'exercice est de déterminer les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ (pour $n \geq 5$).

(1) Soit H un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que $H \cap \mathfrak{A}_n$ est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}_n$. En déduire que H contient $\mathfrak{A}_n$ ou que $H \cap \mathfrak{A}_n = \{Id\}$?

(2) On suppose que $H \cap \mathfrak{A}_n = \{Id\}$. Montrer que la restriction à H du morphisme signature est injective. Montrer que dans ce cas que tous les éléments de H sont dans le centre de $\mathfrak{S}_n$ et en déduire que $H = \{Id\}$.

(3) On suppose que H contient $\mathfrak{A}_n$. Montrer alors que $H = \mathfrak{S}_n$ ou $H = \mathfrak{A}_n$ suivant l'indice de H dans $\mathfrak{S}_n$.

(4) Conclure : si $n \geq 5$, les seuls sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\{Id\}$, $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$..

RÉSOLUBILITÉ

Exercice 5 (Groupe triangulaire supérieur)**.**

(1) Montrez que le groupe de Heisenberg H des matrices $3 * 3$ triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1, est résoluble.

(2) Montrez que le groupe B des matrices triangulaires supérieures $3 * 3$ inversibles (coefficients diagonaux non nuls) est résoluble.

Exercice 6.

Le but de l'exercice est de déterminer les groupes dérivés successifs de $\mathfrak{S}_4$. On notera V_4 le sous-groupe des permutations de profil $(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)$ (avec l'identité).

(1) Montrer que $D(\mathfrak{S}_4) \subset \mathfrak{A}_4$.

(2) Calculer les commutateurs $(1,2)(1,3)(1,2)^{-1}(1,3)^{-1}$ et $(1,2,3)(1,2,4)(1,2,3)^{-1}(1,2,4)^{-1}$.

(3) Montrer que $D(\mathfrak{S}_4) = A_4$.

(4) Montrer que $V_4 \subset D(\mathfrak{A}_4)$.

(5) Vérifier que V_4 est distingué dans $\mathfrak{A}_4$ et que le quotient $\mathfrak{A}_4/V_4$ est un groupe abélien. En déduire que $D(\mathfrak{A}_4) \subset V_4$.

(6) En déduire $D^2(\mathfrak{S}_4)$.

(7) Calculer les autres groupes dérivés de $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 7 (Groupe dérivé de $GL(3,\mathbb{F}_2)$ et de $SL(3,\mathbb{F}_2)$)**.**

(1) Soit

$$t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } s = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que le commutateur $tst^{-1}s^{-1}$ est une transvection.

(2) Rappeler la démonstration du fait que deux transvections de $SL(3,\mathbb{F}_2)$ sont conjuguées dans $SL(3,\mathbb{F}_2)$.

(3) Déterminer $D(SL(3,\mathbb{F}_2))$

(4) Déterminer $D(GL(3,\mathbb{F}_2))$.

Exercice 8 (Groupe dérivé de $GL(2,k)$)**.**

On travaille dans $GL(2,k)$ pour un corps k qui a au moins 4 éléments. Soit $g \in GL(2,k)$. On notera i_g l'automorphisme intérieur donné par g.

(1) Démontrer qu'il existe un scalaire non nul $a \in k$ tel que $a^2 \neq 1$. Que se passe-t-il dans $\mathbb{F}_2$ et dans $\mathbb{F}_3$?

(2) Soit
$$t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } s = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$
Montrer que $T = tst^{-1}s^{-1}$ est une transvection.

(3) Soit τ une transvection de $SL(2,k)$. Il existe $g \in GL(2,k)$ tel que $\tau = i_g(T) := gTg^{-1}$. Calculer τ à l'aide de g, s et t et montrer que $D(SL(2,k))$ contient toutes les transvections.

(4) Déterminer $D(SL(2,k))$.

(5) Déterminer $D(GL(2,k))$.

Exercice 9 (Groupe dérivé de $GL(2,\mathbb{F}_3)$)**.**

On travaille dans $GL(2,\mathbb{F}_3)$.

(1) Soit
$$t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Calculer $tst^{-1}s^{-1}$.

(2) Déterminer $D(GL(2,k))$. Noter que ce calcul ne suffit pas pour déterminer $D(SL(2,k))$.

Simplicité

Exercice 10.

Montrer qu'un groupe d'ordre 63 n'est pas simple.

Exercice 11 (Simplicité de $\mathfrak{A}_5$)**.**

(1) Faire la liste des classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathfrak{A}_n$ en les dénombrant.

(2) Montrer que les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$.

(3) Montrer que les éléments d'ordre 2 sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$.

(4) Montrer que tout sous-groupe distingué H de $\mathfrak{A}_n$ qui contient un élément d'ordre 5 les contient tous. (On remarquera que le groupe engendré par un élément d'ordre 5 est un Sylow.)

(5) Montrer que tout sous-groupe distingué H de $\mathfrak{A}_n$ non réduit à $\{Id\}$ contient au moins deux types d'éléments en plus de l'identité. Montrer alors que $H = \mathfrak{A}_n$.

Exercice 12.

On considère l'action du groupe $G := \{-1, +1\}$ sur l'algèbre des polynômes $k[X, Y]$ par $(-1) \cdot X = -X$ et $(-1) \cdot Y = -Y$. Déterminer l'algèbre des polynômes invariants. Est-ce un anneau factoriel ? Est-il une algèbre de polynômes ?