Exercices sur les actions de groupes
et sur le groupe symétrique

Exercice 1

On fixe une action d'un groupe G sur un ensemble fini E. On suppose que E n'a pas de point fixe, que l'ordre de G est 15, et que le cardinal de E est 17. Déterminer le nombre d'orbites, et le cardinal de chacune d'elles.

Exercice 2 (Des petites questions)

On considère l'action d'un groupe G sur un ensemble E.

1. Montrer qu'un sous-ensemble de E est globalement stable par G si et seulement s'il est réunion d'orbites.
2. Montrer que deux éléments dans la même orbite ont des stabilisateurs conjugués.
3. Montrer que deux éléments conjugués dans le groupe G fixent le même nombre d'éléments.

Exercice 3 (Le théorème de Cayley)

1. Pour tout élément a d'un groupe fini G d'ordre n, on définit l'application

$$\begin{array}{rccc} l_a & : & G & \rightarrow & G \\ & & g & \mapsto & ag \end{array}$$

   Montrer que l_a est une bijection de G, produit de $\frac{n}{ordre(a)}$ cycles à support disjoints tous de longueur $ordre(a)$.
2. Montrer alors que l'application

$$\begin{array}{rccc} l & : & G & \rightarrow & \mathfrak{S}(G) \\ & & a & \mapsto & l_a \end{array}$$

   est un morphisme de groupes, injectif. Tout groupe fini est donc isomorphe à un sous-groupe du groupe des permutations de ses éléments.

Exercice 4

1. Soit p un nombre premier. Montrer que le centre d'un p-groupe G,(i.e. un groupe fini d'ordre une puissance non nulle de p), n'est pas réduit à l'élément neutre.
2. On rappelle que si le quotient d'un groupe par son centre est cyclique alors le groupe est abélien, donc égal à son centre. Montrer qu'un groupe d'ordre p^2 est abélien.
3. Montrer que le centre d'un groupe non abélien d'ordre p^3 est d'ordre p. En déduire que le nombre de classes de conjugaison est p^2+p-1. (On pourra étudier l'action de G sur lui-même par conjugaison : ses points fixes, l'orbite des éléments, le stabilisateur des éléments...)

Exercice 5

Soit G un groupe fini. Soit p le plus petit facteur premier de l'ordre de G. Soit H un sous-groupe de G d'indice $p > 1$.

1. Montrer que les orbites de l'action de H sur G/H (l'ensemble quotient G/H des classes à gauche de G modulo H) par translation à gauche sont réduites à des points.
2. Montrer que H est distingué.

Exercice 6

Déterminer les sous-groupes de Sylow de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.

Exercice 7 (Décompositions explicites)

1. On considère l'élément de $\mathfrak{S}_8$:
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 1 & 2 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$
Décomposer σ en un produit de transpositions et calculer sa signature. Peut-on écrire σ comme produit de douze transpositions ?
2. Soit σ l'élément de $\mathfrak{S}_{11}$:
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 7 & 9 & 11 & 2 & 1 & 3 & 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$
Décomposer σ en un produit de cycles à support disjoints. Préciser l'ordre de σ, et la signature de σ. Calculer σ^2 et σ^3. Écrire σ^{-1} en un produit de cycles à support disjoints.

Exercice 8

1. Si c est le cycle $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, c^2 est-il un cycle ?
2. Si c est un cycle de $\mathfrak{S}_n$ d'ordre l et k un entier naturel, calculer l'ordre de c^k.

Exercice 9 (Étude de $\mathfrak{S}_3$)

Donner les structures de cycles possibles dans $\mathfrak{S}_3$, le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_3$ ayant cette structure, et leur signature. Décrire les sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$, et ceux qui sont distingués dans $\mathfrak{S}_3$.

Déterminer les sous-groupes de Sylow de $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 10 (Étude de $\mathfrak{S}_4$)

Donner les structures de cycles possibles dans $\mathfrak{S}_4$, le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_4$ ayant cette structure, et leur signature. Déterminer les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_4$ (utiliser l'exercice sur les classes de conjugaison). En déduire que A_4 n'est pas un groupe simple, i.e. qu'il possède des sous-groupes distingués autres que $\{e\}$ et A_4.

Déterminer les sous-groupes de Sylow de $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 11

Soit G le sous-groupe de $\mathfrak{S}_7$ engendré par $\alpha = (2,4,6)(5,7,1)$ et $\beta = (3,4)(5,6)$. On se propose de déterminer l'ordre de G. On considère pour cela les ensembles suivants :

$$G_1 = \{\varphi \in G \mid \varphi(1) = 1\} \qquad G_2 = \{\varphi \in G_1 \mid \varphi(2) = 2\} \qquad G_3 = \{\varphi \in G_2 \mid \varphi(3) = 3\}$$
$$X_1 = \{\varphi(1) \mid \varphi \in G\} \qquad X_2 = \{\varphi(2) \mid \varphi \in G_1\} \qquad X_3 = \{\varphi(3) \mid \varphi \in G_2\}.$$

Étant donné un ensemble Y, on note $|Y|$ le cardinal de Y.

1. Montrer que 6 divise $\mid G \mid$.
2. Quelle relation existe-t-il entre $|G|$ et $|X_1|\ |X_2|\ |X_3|\ |G_3|$?
3. Expliciter X_1.
4. Expliciter $\gamma = \alpha\beta\alpha^{-1}$ et $\delta = \gamma\beta\gamma^{-1}$. En déduire $X_3 = \{3,4,5,6\}$ ou $X_3 = \{3,4,5,6,7\}$ et $X_2 = \{2,7\}$ ou $X_2 = \{2,3,4,5,6,7\}$.
5. On fait agir G sur l'ensemble des parties de $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Déterminer l'orbite de la partie $\{1,2,7\}$. En déduire que 7 est fixé par les éléments de G_2 et que G_3 est réduit à l'identité.
6. En déduire $|G|$.

Exercice 12

soit G un groupe agissant sur un ensemble E. Soit E_1 et E_2 deux parties non vides et disjointes de E. Soit g_+ et g_- deux éléments de G tels que toute puissance (positive ou négative) de g_+ envoie tout élément de E_1 dans E_2 et toute puissance g_- envoie tout élément de E_2 dans E_1.

1. Montrer que les mots de la forme $g_+^{k_1} g_-^{l_1} g_+^{k_2} g_-^{l_2} \cdots g_+^{k_d} g_-^{l_d} g_+^{k_{d+1}}$ ne sont pas égaux à l'élément neutre e_G.
2. En déduire en utilisant une conjugaison qu'aucun mot du groupe engendré par g_+ et g_- autre que le mot vide n'est égal à l'élément neutre. On dit alors que le groupe engendré par g_+ et g_- est un groupe libre.
3. Que dire si on suppose seulement que E_1 n'est pas inclus dans E_2 ?
4. Montrer le sous groupe de $SL(2,\mathbb{Z})$ engendré par
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
est libre, en considérant l'action naturelle sur $\mathbb{R}^2$ et les domaines $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| < |y|\}$ et $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| > |y|\}$ délimités par les diagonales.