Exercices de géométrie projective

Exercice 1 (Le plan $P(\mathbb{F}_2^3)$)

1. Déterminer le nombre de points et de droites du plan projectif $P(\mathbb{F}_2^3)$. Représenter les relations d'incidence.
2. Déterminer le nombre de points de l'espace projectif $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_q}$ de dimension n sur le corps $\mathbb{F}_q$.

Exercice 2

On rappelle que le nombre de racine $n$ième de l'unité dans $\mathbb{F}_q$ est $pgcd(n, q-1)$. En considérant, le morphisme $SL(E) \to \mathfrak{S}(P(E))$ associé à l'action de $SL(E)$ sur les droites de E, démontrer l'existence des isomorphismes suivants
- $GL(2, \mathbb{F}_2) = SL(2, \mathbb{F}_2) = PSL(2, \mathbb{F}_2) = PGL(2, \mathbb{F}_2) = \mathfrak{S}_3$
- $PGL(2, \mathbb{F}_3) = \mathfrak{S}_4$ et $PSL(2, \mathbb{F}_3) = \mathfrak{A}_4$.
- $PGL(2, \mathbb{F}_4) = PSL(2, \mathbb{F}_4) = \mathfrak{A}_5$.

Exercice 3

Le but de l'exercice est de démontrer le théorème de Pappus affine : *Soit d et d' deux droites d'un plan affine E. Soit A, B, C (resp. A', B', C') trois points sur d (resp. sur d'.) Si les droites (AB') et (BA') sont parallèles ainsi que les droites (BC') et (CB'), alors les droites (CA') et (AC') le sont aussi.*

Dans le cas où d et d' sont sécantes en I

1. On considère l'homothétie h de centre I qui envoie A sur B. Déterminer l'image de B' par h.
2. On considère l'homothétie H de centre I qui envoie B sur C. Déterminer l'image de C' par H.
3. Déterminer l'image de A et celle de C' par $H \circ h$.
4. Conclure.

Comment raisonner dans le cas où d et d' sont parallèles ?

Exercice 4 (Avec un repère projectif)

Dans un plan projectif réel, on considère le repère projectif $(A, B, C; I)$. Soit A', B', C' respectivement sur $(BC), (CA)$ et (AB) tels que $(AA'), (BB')$ et (CC') soient concourantes en I. Montrer analytiquement que les points $P := (BC) \cap (B'C')$, $Q := (CA) \cap (C'A')$ et $R := (AB) \cap (A'B')$ sont alignés.

Exercice 5

Soit $F = P(f)$ une homographie d'une droite projective dans elle-même. À quoi correspondent en terme de f les points fixes de F ? Montrer que si F admet trois points fixes deux à deux distincts, F est l'identité.

Exercice 6 (Perspective)

Soit $\vec{V}$ un espace vectoriel et $P := P(\vec{V})$.

1. Soit F et G deux sous-espaces projectifs disjoints de P. Montrer qu'il existe un unique sous-espace projectif $< F, G >$ de P de dimension $\dim F + \dim G + 1$ contenant F et G.
2. Soit F et G deux sous-espaces projectifs disjoints de P tels que $\dim F + \dim G = \dim P - 1$. Quel est le domaine de définition de l'application (appelée perspective) ?

$$\begin{array}{ccccc} P(\vec{V}) & \to & G & \subset & P(\vec{V}) \\ M & \mapsto & G\cap < M, F > & = & P(\vec{G} \cap (\vec{M} \oplus \vec{F})) \end{array}$$

   Montrer que c'est une application projective.

Exercice 7 (Quadrique)

Soit $\vec{V}$ un espace vectoriel et q une forme quadratique sur $\vec{V}$. On appelle quadrique projective associée à q le sous ensemble de $P := P(\vec{V})$ défini par (p est la projection canonique $\vec{V} - \{0\} \to P$)

$$Q := p\left(\{x \in \vec{V} - \{0\}/q(x) = 0\}\right).$$

1. On suppose $\dim P = 1$. Montrer que si Q contient trois points distincts, $Q = P$.
2. On suppose $\dim P = 2$. Montrer que si Q contient une droite d, soit $Q = P$, soit il existe une droite d' telle que $Q = d \cup d'$.
3. Soit d une droite de P. Montrer que si d rencontre Q en au moins trois points, d est incluse dans Q. Montrer que si $k = \mathbb{C}$ alors d rencontre Q.