Exercices de géométrie projective

Exercice 1

Ecrire la forme générale des homographies de la droite projective $\mathbb{P}^1$ en coordonnées homogènes, puis cartésiennes en choisissant $x_1 = 0$ comme hyperplan à l'infini.

Exercice 2 (Dessiner)

Soit Q un quadrilatère complet d'un plan projectif donné par quatre droites d_1, d_2, d_3 et d_4. Représenter Q après avoir envoyé à l'infini
1. seulement un sommet. 2. seulement un coté. 3. seulement une diagonale.

Exercice 3

Énoncer le théorème dual du théorème de Pappus.

Exercice 4

Soit $\{O, A, B, C\}$ et $\{O, A', B', C'\}$ deux quadruplets de points alignés. Montrer que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes si et seulement si $[O, A, B, C] = [O, A', B', C']$.

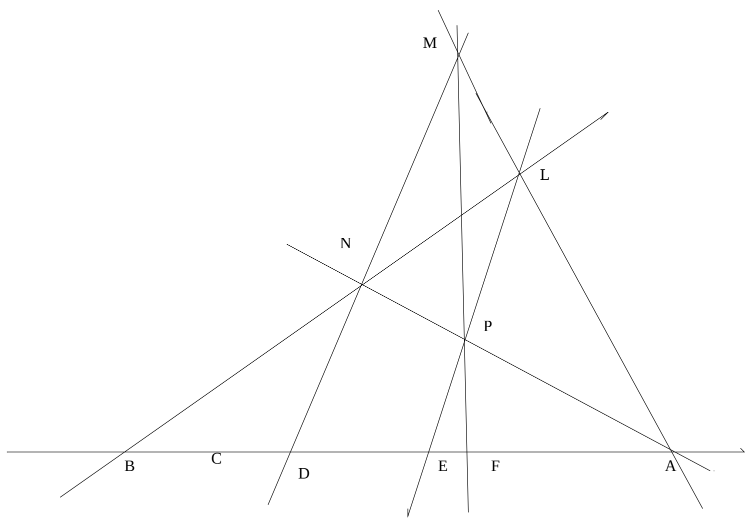
Exercice 5

Soit p un point du plan projectif $\mathbb{P}^2 = P(V)$ et l une droite qui ne passe pas par p. On note $p^\vee$ l'ensemble des droites de $\mathbb{P}^2$ qui passe par p. Montrer que $p^\vee$ est une droite de $P(V^\star)$. On dit que $p^\vee$ est un faisceau linéaire de droites. Montrer que l'application $p^\vee \to l$, $d \mapsto d \cap l$ est une application projective.

Exercice 6

Soit p un point de $\mathbb{P}^2$ et d_1, d_2, d_3, d_4 quatre droites de $\mathbb{P}^2$ du faisceau $p^\vee$, c'est à dire qui passent par p. Montrer que le birapport de ces quatre droites est le birapport des quatre points correspondant de la droite $p^\vee$.

Exercice 7



1. Dessiner la configuration correspondante dans le plan affine $P(V) - (AM)$.
2. Choisir des coordonnées homogènes telles que l'on ait $A = (1 : 0 : 0), B = (0 : 1 : 0), L = (0 : 0 : 1)$ et $C = (1 : 1 : 0)$. Déterminer les équations des droites projectives $(BL), (DM), (NA), (LE), (MP)$ et les coordonnées homogènes des points $N = (BL) \cap (DM), P = (NA) \cap (LE)$ et $F = (AB) \cap (MP)$ en termes des coordonnées homogènes des points D, E et M.
3. Exprimer le birapport $[A, B, C, F]$ en termes de $x = [A, B, C, D]$ et $y = [A, B, C, E]$.

Exercice 8 (Coordonnées homogènes et birapport)

1. Soit $(A, B; C)$ un repère projectif de la droite projective $P^1 := P(k^2)$ dont le point unitaire est C. Soit M un point de P^1 de coordonnées homogènes $[X : Y]$. Calculer le birapport $[A, B, C, M]$.
2. Soit cinq points distincts A, B, C, D, E d'une droite projective. Calculer le produit $[A, B, C, D][A, B, D, E][A, B, E, C]$.

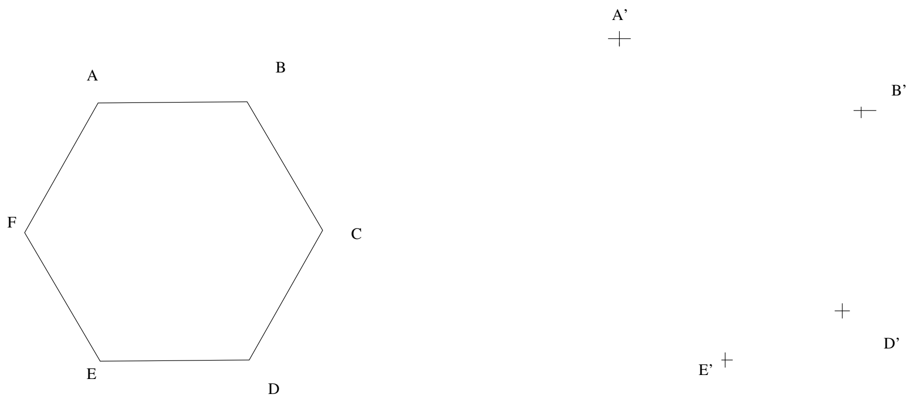
Exercice 9 (Deux constructions)

Donner une construction à l'aide d'une règle non graduée de la droite passant par un point M du plan et parallèle à deux droites parallèles d et d' données.

Etant donné un point P et deux droites d, d' dont l'intersection Q est en dehors de la feuille, construire à la règle la droite (PQ).

Exercice 10

1. Soit 6 points $A, B, \cdots F$ du plan $\mathbb{R}^2$ tels que $ABCDEF$ soit un hexagone régulier, Etant données les images $A' = h(A)$, $B' = h(B)$, $D' = h(D)$ et $E' = h(E)$ par une homographie h de $P^2(\mathbb{R})$ dans lui-même, construire à la règle les images des autres points.



2. Même question en supposant données cette fois, les images $A' = h(A)$, $B' = h(B)$, $C' = h(C)$ et $D' = h(D)$.

Exercice 11 (Dualité)

Dans un plan projectif, soit d une droite et A, B deux points hors de d. Pour chaque choix de deux points M et M' sur d on considère la droite Δ passant par les points $(MA) \cap (M'B)$ et $(M'A) \cap (MB)$. Montrer qu'il existe un point par lequel passent toutes les droites Δ.