UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Théorie des groupes et géométrie

Examen

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses. Les résultats du cours peuvent être utilisés sans démonstrations. Il est bon de relire sa copie...

Durée : 2 heures

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (2 points)

Combien le groupe $\mathfrak{S}_5$ contient-il de 5-Sylow ?

Exercice 2 (7 points)

1 Déterminer le centre de $SL(4,\mathbb{F}_2)$ et calculer l'ordre de $PSL(4,\mathbb{F}_2)$ en produits de nombres premiers.

2 Dans $SL(4,\mathbb{F}_2)$ déterminer l'ordre de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et de } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ces deux matrices sont-elles conjuguées dans $SL(4,\mathbb{F}_2)$?

3 Déterminer le centre de $SL(3,\mathbb{F}_4)$ et calculer l'ordre de $PSL(3,\mathbb{F}_4)$ en produits de nombres premiers.

4 Le but de cette question est de montrer que toutes les involutions de $PSL(3,\mathbb{F}_4)$ sont des applications projectives associées à des transvections. Soit F une homographie de $PSL(3,\mathbb{F}_4)$ involutive (i.e. $F^2 = Id \in PSL(3,\mathbb{F}_4)$) et $f \in SL(3,\mathbb{F}_4)$ telle que $P(f) = F$.

a Montrer que $P(f^3) = F$ et que f^3 est d'ordre 2 dans $SL(3,\mathbb{F}_4)$. On notera $g = f^3$.

b Quelle est la caractéristique de $\mathbb{F}_4$? Montrer que $(g - Id)^2 = 0$. Déterminer $\dim Ker(g - Id)$ et $\dim Im(g - Id)$.

c Conclure.

5 En étudiant les classes de conjugaison des éléments d'ordre 2, déterminer si $PSL(4,\mathbb{F}_2)$ et $PSL(3,\mathbb{F}_4)$ sont isomorphes.

Exercice 3 (6 points)

Soit F une homographie du plan projectif P^2 qui admet une droite d de points fixes.

1 Montrer qu'on peut choisir $f \in GL(3,k)$ telle que $F = P(f)$ et f admet un plan de points fixes.

2 Montrer alors qu'il existe un point O de P^2 (appelé centre de F) tel que pour tout point M de P^2 non fixé par F, la droite $(MF(M))$ passe par O.

3 Soit d une droite et O un point hors de d. Soit A et A' deux points hors de d avec $A \neq O$ et O, A, A' alignés. Montrer en choisissant un repère convenable qu'il existe une unique homographie F telle que d soit une droite de points fixes et O le centre et qui envoie A sur A'.

4 Soit F une homographie du plan projectif P^2 qui admet une droite d de points fixes et de centre O. Sachant que $F(A) = A'$, construire l'image du point M par F dans les cas suivants.

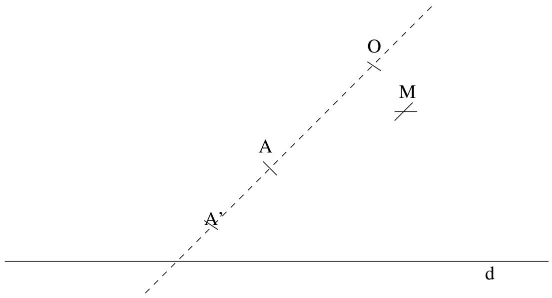

FIG. 1 –

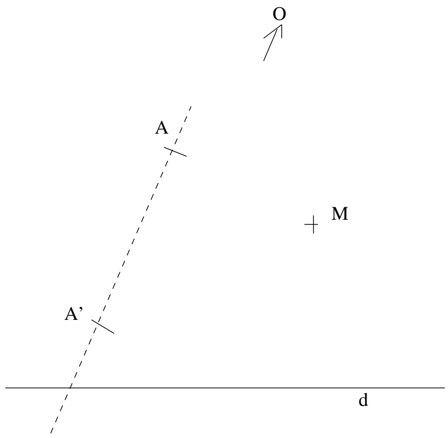

FIG. 2 – le point O est à l'infini

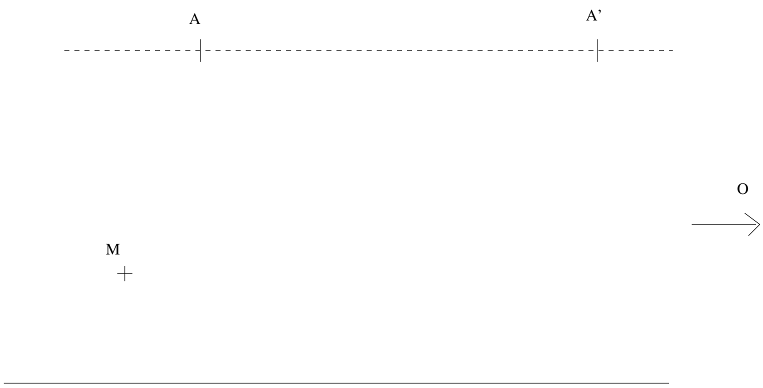

FIG. 3 – le point 0 est à l'infini dans la direction de d

5 Soit H une involution. On considère deux points P et Q (dont on admet l'existence) qui, avec leur image P' et Q', forment un repère projectif (aucun triplet n'est formé de points alignés). On définit $O := (PP') \cap (QQ')$ et d la droite reliant $(PQ') \cap (QP')$ et $(PQ) \cap (P'Q')$. Montrer que H est l'homographie de droite fixe d de centre O qui envoie P sur P'.

Exercice 4 (5 points)

1 Montrer que deux formes quadratiques équivalentes sur un espace E prennent les mêmes valeurs dans k.
2 Soit dans tout l'exercice (E, f) un espace muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de forme quadratique associée q. Montrer que si f admet un vecteur non nul isotrope, la forme q prend toutes les valeurs de k.
3 Montrer que E se décompose comme somme directe orthogonale de plans hyperboliques et d'un sous-espace sur lequel la forme quadratique n'a pas de vecteur isotrope non nul.
4 Montrer que le nombre de plans hyperboliques dans une telle décomposition est indépendant de la décomposition. Le décrire à l'aide d'un invariant défini en cours.

Un corrigé sera disponible sur internet.