UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Théorie des groupes et géométrie

Examen

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses. Les résultats du cours peuvent être utilisés sans démonstrations. Il est bon de relire sa copie...

Durée : 2 heures

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (2 points)

Combien le groupe $\mathfrak{S}_5$ contient-il de 5-Sylow ?

Solution : Le théorème de Sylow donne que ce nombre N est congru à 1 modulo 5 et divise 24. C'est donc 1 ou 6. Comme $(12)(12345)(12) = (21345)$ n'est pas dans le 5-Sylow (d'ordre 5) $< (12345) >$ il y a un 5-Sylow non distingué. Ainsi, $N = 6$.

Exercice 2 (7 points)

1 Déterminer le centre de $SL(4, \mathbb{F}_2)$ et calculer l'ordre de $PSL(4, \mathbb{F}_2)$.

Solution : Comme le seul élément non nul de $\mathbb{F}^2$ est 1, $SL(4, \mathbb{F}^2) = GL(4, \mathbb{F}_2)$. Le centre de $GL(4, \mathbb{F}_2)$ composé des homothéties inversibles est donc réduit à l'identité ainsi que celui de $SL(4, \mathbb{F}_2)$. Ainsi, $|PSL(4, \mathbb{F}^2)| = |GL(4, \mathbb{F}^2)| = (2^4-1)(2^4-2)(2^4-2^2)(2^4-2^3) = 15\times14\times12\times8 = 7 \times 5 \times 3^2 \times 2^6$.

2 Dans $SL(4, \mathbb{F}_2)$ déterminer l'ordre de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et de } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ces deux matrices sont-elles conjuguées dans $SL(4, \mathbb{F}_2)$?

Solution : Ces deux matrices sont d'ordre 2. Elles ne sont pas conjuguées car la dimension des espaces propres de valeurs propres 1 n'est pas la même pour les deux.

3 Déterminer le centre de $SL(3, \mathbb{F}_4)$ et calculer l'ordre de $PSL(3, \mathbb{F}_4)$.

Solution : Tous les éléments de $\mathbb{F}_4^\times$ sont des racines 3-ième d'unité par le théorème de Lagrange. Par conséquent toutes les homothéties inversibles sont dans le centre de $SL(3, \mathbb{F}_4)$. Donc, $|PSL(3, \mathbb{F}^4) = GL(3, \mathbb{F}_4)/(3 \times 3) = (4^3 - 1)(4^3 - 4)(4^3 - 4^2)/9 = 63 \times 60 \times 48/9 = 7 \times 5 \times 3^2 \times 2^6$.

4 Le but de cette question est de montrer que toutes les involutions de $PSL(3, \mathbb{F}_4)$ sont des applications projectives associées à des transvections. Soit F une homographie de $PSL(3, \mathbb{F}_4)$ involutive (i.e. $F^2 = Id \in PSL(3, \mathbb{F}_4)$) et $f \in SL(3, \mathbb{F}_4)$ telle que $P(f) = F$.

a Montrer que $P(f^3) = F$ et que f^3 est d'ordre 2 dans $SL(3, \mathbb{F}_4)$. On notera $g = f^3$.

Solution : $P(f^3) = F^3 = F$ car F est une involution. $g = f^3$ n'est donc pas l'identité, mais $g^2 = f^6 = (f^2)^3 = Id$ car f^2 est dans le centre de $SL(3, \mathbb{F}_4)$ qui est d'ordre 3.

b Quelle est la caractéristique de $\mathbb{F}_4$? Montrer que $(g - Id)^2 = 0$. Déterminer $\dim Ker(g - Id)$ et $\dim Im(g - Id)$.

Solution : Le corps $\mathbb{F}_4$ est de caractéristique 2. $(g-Id)^2 = g^2 - 2g + Id = 0$. Par conséquent, $\dim Im(g - Id) \leq \dim Ker(g - Id)$ et $\dim Im(g - Id) + \dim Ker(g - Id) = 3$. Comme $g \neq Id$, $\dim Ker(g - Id) = 2$.

c Conclure.

Solution : Ainsi g est un élément de $SL(3, \mathbb{F}_4)$ qui admet un plan de points fixes. C'est donc une transvection.

5 En étudiant les classes de conjugaison des éléments d'ordre 2, déterminer si $PSL(4, \mathbb{F}_2)$ et $PSL(3, \mathbb{F}_4)$ sont isomorphes.

Solution : Dans $PSL(4, \mathbb{F}_2)$, il y a au moins deux classes de conjugaison d'éléments d'ordre 2 par la question 1. Dans $SL(3, \mathbb{F}_4)$ comme toutes les transvections sont conjuguées, la question 4 permet d'affirmer qu'il n'y a qu'une classe de conjugaison d'éléments d'ordre 2. Les deux groupes ne sont donc pas isomorphes.

Exercice 3 (6 points)

Soit F une homographie du plan projectif P^2 qui admet une droite d de points fixes.

1 Montrer qu'on peut choisir $f \in GL(3, k)$ telle que $F = P(f)$ et f admet un plan de points fixes.

Solution : Comme F admet une droite d de points fixes, f fixe toutes les droites d'un plan. C'est donc en restriction à ce plan, une homothétie. Quitte à diviser par ce rapport non nul, on peut supposer que f est l'identité sur ce plan.

2 Montrer alors qu'il existe un point O de P^2 (appelé centre de F) tel que pour tout point M de P^2 non fixé par F, la droite $(MF(M))$ passe par O.

Solution : L'application f est alors soit une dilatation, soit une tranvection. Dans le premier cas, avec un repère adapté, tout point de coordonnées (X, Y, Z) et son image de coordonnées $X, Y, \lambda Z)$ sont coplanaires avec le point de coordonnées $(0, 0, 1)$. Dans le second cas tout point de coordonnées (X, Y, Z) et son image de coordonnées $(X, Y + Z, Z)$ sont coplanaires avec le point de coordonnées $(0, 1, 0)$. On en déduit donc l'existence d'un centre O.

3 Soit d une droite et O un point hors de d. Soit A et A' deux points hors de d et $A \neq O$ et O, A, A' alignés. Montrer en choisissant un repère convenable qu'il existe une unique homographie F telle que d soit une droite de points fixes et O le centre et qui envoie A sur A'.

Solution : On choisit un repère projectif de P^2 composé de M_1 et M_2 sur d, puis $M_3 = O$ et comme point unitaire $M_4 = A$. On obtient un repère tel que d ait pour équation $Z = 0$ et O pour coordonnées homogènes $[0 : 0 : 1]$ et A pour coordonnées homogènes $[1 : 1 : 1]$. Notons $[x : x : z]$ des coordonées homogènes de A' aligné avec O et A avec $x \neq 0$ car $A' \neq O$ et $z \neq 0$ car $A' \notin d$. On peut donc normaliser avec $A'[1 : 1 : z]$. Comme d doit être laissée fixe par l'homographie cherchée $P(f)$, quitte à normaliser, on peut supposer que f est l'identité sur $vect(e_1, e_2)$. Comme $P(f)(A) = A'$, $f(e_1+e_2+e_3) = e_1+e_2+f(e_3)$ est proportionel à $e_1+e_2+ze_3$. Donc, $f(e_3) = ze_3$. Réciproquement, cette application f satisfait les conditions requises (voir le cas de la dilatation).

4 Soit F une homographie du plan projectif P^2 qui admet une droite d de points fixes et de centre O. Sachant que $F(A) = A'$, construire l'image du point M par F dans les cas suivants.

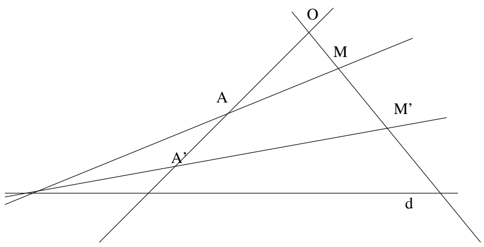

FIG. 1 –

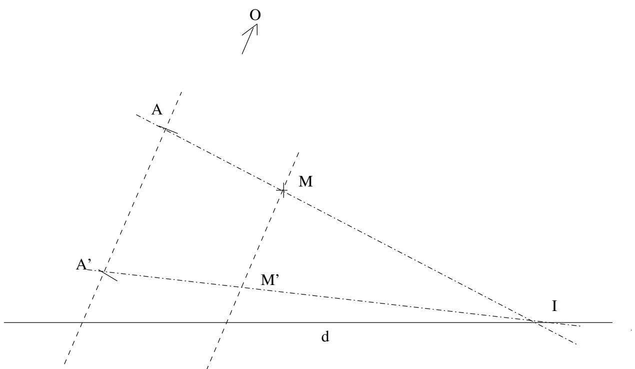

FIG. 2 – le point O est à l'infini

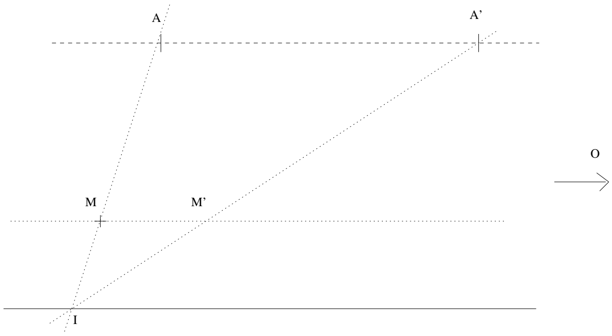

FIG. 3 – le point 0 est à l'infini dans la direction de d

5 Soit H une involution. On considère deux points P et Q tels que avec leur image P' et Q' ils forment un repère projectif (aucun triplet n'est formé de points alignés). On définit $O := (PP') \cap (QQ')$ et d la droite reliant $(PQ') \cap (QP')$ et $(PQ) \cap (P'Q')$. Montrer que H est l'homographie de droite fixe d de centre O qui envoie P sur P'.

Solution : Notons ϕ l'homographie de droite fixe d de centre O qui envoie P sur P'. On

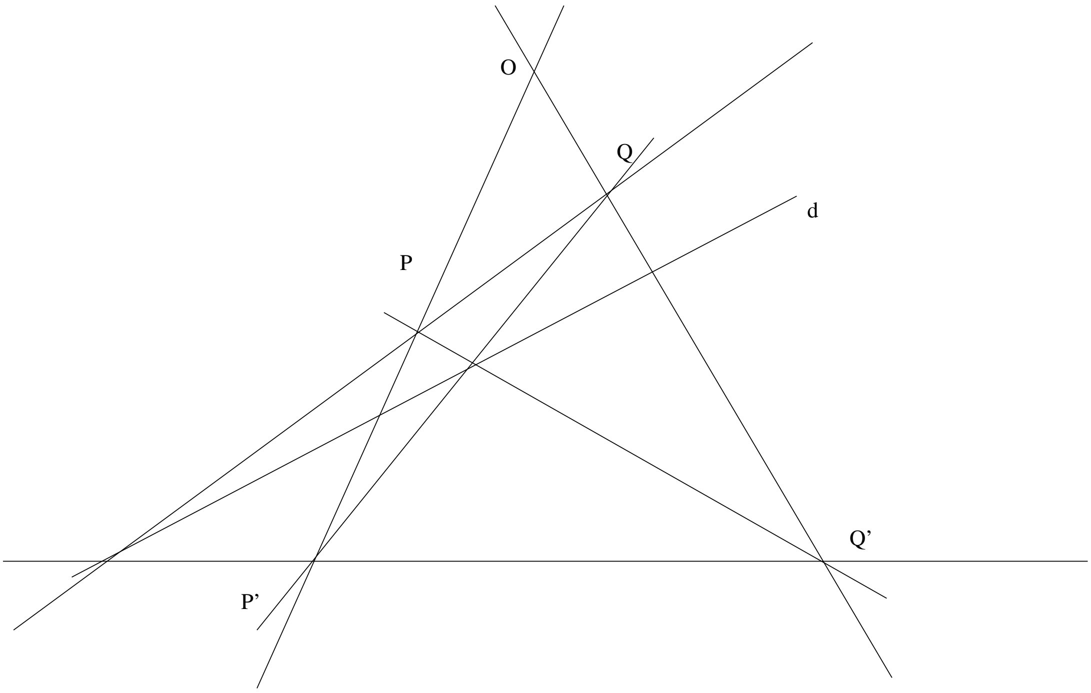

FIG. 4 –

vérifie successivement qu'elle envoie P sur P', Q sur Q', P' sur P et enfin Q' sur Q. Elle coïncide avec H sur un repère projectif donc partout.

Exercice 4 (5 points)

1 Montrer que deux formes quadratiques équivalentes sur un espace E prennent les mêmes valeurs dans k.

Solution : Si q et Q sont équivalents, il existe un isomorphisme linéaire u de E tel que $Q = q \circ u$. Par conséquent Q prend toutes les valeurs que prend q.

2 Soit (E, f) un espace muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de forme quadratique associée q. Montrer que si f admet un vecteur non nul isotrope, la forme q prend toutes les valeurs de k.

Solution : On sait dans ce cas, que le vecteur isotrope est dans un plan hyperbolique, sur lequel q est équivalente à la forme $Q(x, y) = xy$ qui prend toutes les valeurs de k.

3 Montrer que E se décompose comme somme directe orthogonale de plans hyperboliques et d'un sous-espace sur lequel la forme quadratique n'a pas de vecteur isotrope non nul.

Solution : On procède par récurrence comme dans le cours en utilisant le fait que l'orthogonal d'un espace non singulier dan un espace non-singulier est non-singulier et on s'arrête quand la forme n'a plus de vecteurs isotropes non nuls.

4 Montrer que le nombre de plans hyperboliques dans une telle décomposition est indépendant de la décomposition. Le décrire à l'aide d'un invariant défini en cours.

Solution : Si dans une telle décomposition, il y a k plans hyperboliques, et dans une autre k', si $k \leq k'$, par le théorème de Witt, l'isométrie entre k des plans hyperboliques des deux décompositions induit une équivalence des orthogonaux. En particulier, ils n'ont pas de vecteurs isotropes. Donc $k' = k$. A l'aide de la décomposition, on peut facilement construire un sous-espace totalement isotrope I de dimension k. Ce nombre k est donc inférieur à l'indice de q. On injecte I dans un sous-espace totalement isotrope de dimension maximale M. Par le théorème de Witt, les orthogonaux sont isomorphes et ne contiennent donc pas de vecteurs isotropes. Donc, I est de dimension maximale, et $k = \nu(q)$.