Devoir en temps libre (à rendre le vendredi 19 février)

Exercice 1

Soit p un nombre premier impair, on se propose de décrire les groupes de cardinal p^2.

1. Soit G un groupe de cardinal p^2, montrer que, ou bien G est cyclique ou bien tous les éléments différents de l'élément neutre sont d'ordre p.
2. Soit G un groupe non cyclique d'ordre p^2, soit K un sous-groupe d'ordre p, montrer que K est distingué dans G et qu'il existe H sous-groupe d'ordre p tel que $K \cap H = \{e\}$. En déduire que G est ismorphe à un produit semi-direct de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
3. Montrer que tout groupe de cardinal p^2 est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 2

Soit $p > q > r$ trois nombres premiers. Le but de l'exercice est de montrer qu'un groupe d'ordre pqr est résoluble.

1. Montrer qu'un groupe d'ordre pq est résoluble.
2. Soit G un groupe d'ordre pqr. Supposons qu'il n'admette pas de sous-groupe distingué. On note N_p (resp. N_q, N_r) le nombre de sous-groupes de Sylow d'ordre p (resp. q, r). Montrer que $N_p = qr$, $N_q \geq p$ et $N_r \geq q$.
3. Conclure.

Exercice 3

On veut tracer la droite joignant deux points donnés A et B, en disposant d'une règle trop courte. Pour ceci, on trace une droite d "à mi-chemin" entre A et B, et on essaie de construire le point d'intersection de d avec (AB) (sans tracer (AB)). On nommera les points dans l'ordre alphabétique suivant leur apparition dans la construction .