UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Théorie des groupes et géométrie

Partiel

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses. Il est bon de relire sa copie...

Durée : 2 heures

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (Questions de cours (4 points))

1 Donner l'exemple groupe simple. (Justifier)
2 Donner l'exemple d'un groupe résoluble. (Justifier)
3 Donner si possible l'exemple d'un groupe simple résoluble.(Justifier)
4 Donner si possible l'exemple d'un groupe simple résoluble non abélien. (Justifier)

Exercice 2 (Théorème de Jordan (6 points))

Soit G un groupe fini. Pour toute fonction f sur G à valeurs réelles, et pour toute partie A de G on note

$$\int_G f := \frac{1}{\operatorname{Card} G}\sum_{g\in G} f(g) \text{ et } \int_A f := \int_G 1_A f$$

où 1_A est la fonction caractéristique de A.

Le groupe G agit sur un ensemble E de cardinal $n \geq 2$. On considère aussi l'action suivante de G sur $E \times E$

$$\begin{array}{rcl} G \times (E \times E) & \to & E \times E \\ (g,(x,y)) & \mapsto & (g(x), g(y)). \end{array}$$

1 On note $\phi(g)$ le nombre de points fixes de g pour l'action sur E. Calculer en fonction de ϕ le nombre d'orbites de l'action sur E.
2 Calculer en fonction de ϕ le nombre de points fixes de g pour l'action sur $E \times E$ et le nombre d'orbites de l'action sur E^2.
3 En considérant la diagonale de $E \times E$, montrer que l'action sur $E \times E$ a au moins deux orbites.
4 On note L l'ensemble des éléments de G qui agissent sur E sans points fixes. En utilisant que sur $G - L$, $1 \leq \phi(g) \leq n$, montrer que

$$\int_G (\phi(g) - 1)(\phi(g) - n) \leq n\frac{\operatorname{Card} L}{\operatorname{Card} G}.$$

5 On suppose que G agit transitivement sur E. Déterminer une minoration de $\frac{\operatorname{Card} L}{\operatorname{Card} G}$ et montrer qu'il existe un élément qui agit sans point fixe sur E.
6 On considère un corps k à n éléments et A une droite affine sur le corps k. Déterminer le rapport $\frac{\operatorname{Card} L}{\operatorname{Card} G}$ pour l'action naturelle du groupe affine (des transformations de la forme $x \mapsto ax+b$ $(a \neq 0)$) sur A.

Exercice 3 (Les groupes d'ordre 10 (6 points))

Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre 10.
Réfléchissez, cherchez au brouillon, rédigez les résultats même s'ils ne sont que partiels.

Exercice 4 (La droite d'Euler d'un triangle (4 points))

Dans un triangle ABC montrer, en utilisant un théorème de géométrie projective que le centre de gravité G est sur la droite (OH) joignant le centre du cercle circonscrit O et l'orthocentre H.