UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Théorie des groupes et géométrie

Partiel (corrigé)

Exercice 1

(Questions de cours (4 points))

1 Le groupe $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est simple. En effet, tout sous-groupe distingué a par le théorème de Lagrange, soit 1 élément, soit 5 éléments, car 5 est premier.
2 Le groupe $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est abélien. Son groupe dérivé, engendré par les commutateurs est donc réduit à $\{0\}$. Le groupe $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est donc résoluble.
3 Le groupe $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est simple et résoluble.
4 Ce n'est pas possible. Montrons que tout groupe simple résoluble est abélien. Soit G un groupe simple résoluble. Son groupe dérivé est distingué donc égal à $\{e\}$ ou G. La seconde possibilité mènerait à la constance de la suite des groupes dérivés successifs et donc à la non résolubilité. Par conséquent, $D(G) = \{e\}$ et tous les commutateurs sont égaux à e et G est abélien.

Exercice 2

(Théorème de Jordan (6 points))

Soit G un groupe fini. Pour toute fonction f sur G à valeurs réelles, et pour toute partie A de G on note
$$\int_G f := \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g \in G} f(g) \text{ et } \int_A f := \int_G 1_A f$$
où 1_A est la fonction caractéristique de A.

Le groupe G agit sur un ensemble E de cardinal $n \geq 2$. On considère aussi l'action suivante de G sur $E \times E$
$$\begin{array}{rcl} G \times (E \times E) & \to & E \times E \\ (g, (x, y)) & \mapsto & (g(x), g(y)). \end{array}$$

1 On note $\phi(g)$ le nombre de points fixes de g pour l'action sur E. Par le lemme de Burnside, le nombre d'orbites est la moyenne
$$N_E = \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g \in G} \phi(g) = \int_G \phi.$$

2 Les points fixes de g pour l'action sur $E \times E$ sont les couples (x, y) où x et y sont fixes par l'action de g sur E. Il y en a donc $\phi^2(g)$. Le nombre d'orbites de l'action sur E^2 est par le lemme de Burnside
$$N_{E \times E} = \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g \in G} \phi^2(g) = \int_G \phi^2.$$
.
3 La diagonale de $E \times E$ est stable par l'action de G. Par conséquent, il y a au moins une orbite dans la diagonale et une autre en dehors.

4 On note L l'ensemble des éléments de G qui agissent sur E sans points fixes. Sur $G-L$, $1 \leq \phi(g) \leq n$,

$$\begin{aligned}
\int_G (\phi(g)-1)(\phi(g)-n) &= \int_L (\phi(g)-1)(\phi(g)-n) + \int_{G-L} (\phi(g)-1)(\phi(g)-n) \\
&= \int_L n + \int_{G-L} (\phi(g)-1)(\phi(g)-n) \\
&\leq \int_L n \text{ car } (\phi(g)-1)(\phi(g)-n) \text{ est négatif sur } G-L. \\
&\leq n \quad \frac{\operatorname{Card} L}{\operatorname{Card} G}.
\end{aligned}$$

5 On suppose que G agit transitivement sur E. Il n'y a alors qu'une orbite pour l'action de G sur E et $N_E = \int_G \phi(g) = 1$.

$$\begin{aligned}
\int_G (\phi(g)-1)(\phi(g)-n) &= \int_G \phi^2(g) - (n+1)\int_G \phi(g) + \int_G n \\
&= N_{E\times E} - (n+1) + n \\
&\geq 2 - 1 > 0
\end{aligned}$$

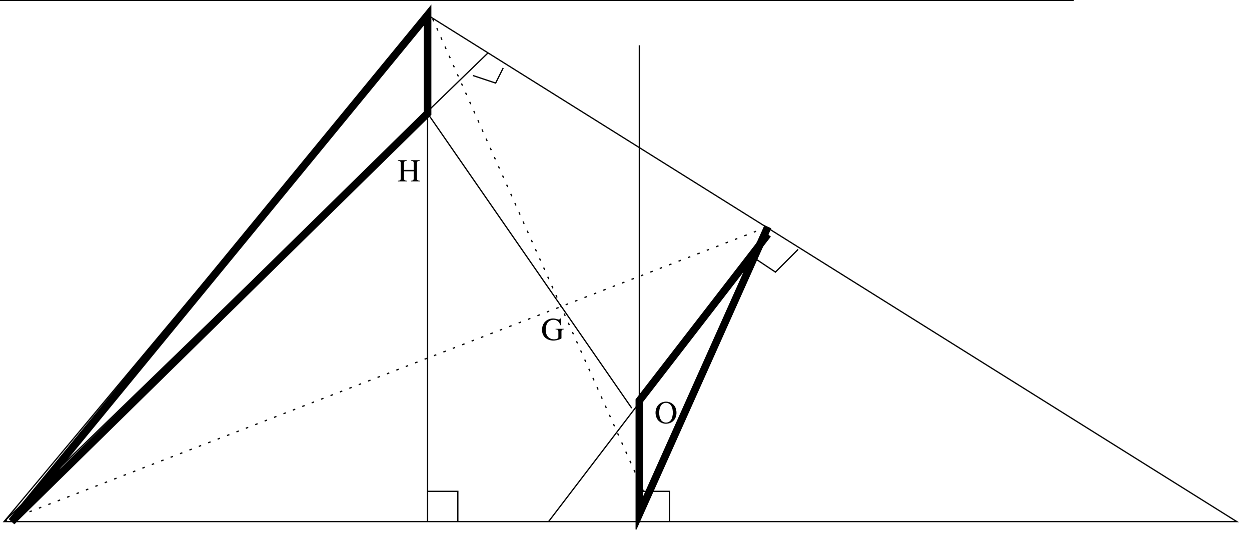
Avec la question précédente, on en déduit que $\operatorname{Card} L \geq \frac{\operatorname{Card} G}{n}$, c'est à dire que l'un des éléments agit sans points fixes.

6 On considère un corps k à n éléments et A une droite affine sur le corps k. Le groupe affine a $n(n-1)$ éléments. Ceux qui n'ont pas de points fixes sont les n translations. Le rapport $\frac{\operatorname{Card} L}{\operatorname{Card} G}$ pour l'action naturelle du groupe affine sur A est donc $\frac{1}{n-1} = \frac{\operatorname{Card} G}{n}$.

Exercice 3 (Les groupes d'ordre 10 (6 points))

Par le théorème de Cauchy, il y a un élément a d'ordre 2 et un autre b d'ordre 5. Le sous-groupe d'ordre 5 trouvé est d'indice 2, donc distingué. Comme ce sont des sous-groupes distincts d'ordre premier, $< a > \cap < b > = \{e\}$ et $| < a > || < b > | = |G|$, G est produit semi direct isomorphe à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times | \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Comme les seuls automorphismes d'ordre 2 de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, sont l'identité et $n \mapsto -n$, les deux groupes d'ordre 10 à isomorphismes près sont $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ et le groupe dihédral D_{10}.

Exercice 4 (La droite d'Euler d'un triangle (4 points))



On applique le théorème de Desargues aux deux triangles mis en évidence. Leur cotés sont deux à deux parallèles, car la droite qui joint le milieu de deux cotés d'un triangle est parallèle au troisième et car médiatrices et hauteurs correspondantes sont parallèles puisque orthogonales à une même droite.