

Exercice 1

- 1 Déterminer le sous-groupe de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ engendré par $([1]_2, [1]_3)$.
- 2 Le groupe $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ est-il cyclique ?
- 3 Le groupe $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est-il cyclique ?

Exercice 2

Sur le cercle unité, indiquer les éléments du groupe des racines de l'unité d'ordre 6. Soit $\zeta = \exp(2i\pi/6)$. Marquer les éléments du sous-groupe engendré par ζ^3

Exercice 3

Soit la racine de l'unité $z = e^{16i\pi/11}$. Déterminer son ordre dans \mathbf{C}^* . Quel est l'ordre de z^4 ?

Exercice 4

Etablir le diagramme des cycles du groupe $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.

Exercice 5

Voici la table d'un groupe G . Quel est l'ordre de G ? Compléter la table.

*	a	b	c	d
a			c	d
b	b	d		
c		a		b
d	d			a

Exercice 6

Ecrire la liste des matrices inversibles 2×2 à coefficients dans \mathbb{F}_2 . Déterminer un groupe connu, isomorphe au groupe $GL(2, \mathbb{F}_2)$ des matrices inversibles 2×2 à coefficients dans \mathbb{F}_2 .

Exercice 7

Soit \mathbb{F}_4 le corps $\mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$. Nous désignons les quatre éléments du corps $K = \mathbb{F}_4$ par $0, 1, [X] = 2, [X + 1] = 3$, où 0 et 1 sont les éléments neutres respectifs des groupes additif et multiplicatif de K .

Quel est l'élément 2×2 dans K ? Quel est l'élément $2 + 2 + 2$ dans K ?