

Exercices à savoir faire

Exercice 1

Considérons le groupe $(\mathbb{F}_{13})^\times$. Quels sont les ordres possibles d'un élément de ce groupe ? Combien d'éléments de chaque ordre ce groupe possède-t-il ? Déterminer tous les générateurs de ce groupe.

Exercice 2

Donner la liste des polynômes irréductibles de $\mathbb{F}_2[X]$ de degré 2 et 3.

Exercice 3

Déterminer la liste des éléments et la table de multiplication de l'anneau quotient

$$\mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1).$$

Exercice 4

1. Montrer que le polynôme $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_3[X]$.
2. Quelle est alors la structure de l'ensemble quotient $A = \mathbb{F}_3[X]/(X^2 + 1)$?
3. Quelle relation vérifie la classe α du polynôme X dans ce quotient ?
4. Donner la liste des éléments de A .
5. Déterminer l'ordre multiplicatif de α dans A^\times .
6. Déterminer l'ordre multiplicatif de $a := \alpha + 2$ dans A^\times .
7. Etablir la table des puissances de a .
8. Calculer $(2 + a)(2 + 2a)$.
9. Calculer $a^3 + a^2$ comme puissance de a .
10. Calculer $(1 + 2a)^{-1}$.

Exercice 5

Combien le corps $\mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1)$ a-t-il d'éléments ?

Exercice 6

Déterminer un générateur du groupe

$$(\mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1))^\times.$$

Calculer $\alpha^3 + \alpha^2$ comme puissance de α .