

Dans tout le cours les anneaux sont munis d'une unité pour la multiplication et les morphismes d'anneaux respectent les unités.

## Exercices à savoir faire

### Questions de cours

- 1 Ecrire les tables d'opération dans l'anneau  $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ .
- 2 Soit  $p$  un nombre premier, et soit  $(G, \star)$  un groupe d'ordre  $p$ . Montrer que  $G$  est cyclique.
- 3 Démontrer que le noyau d'un morphisme d'anneaux commutatifs est un idéal.
- 4 L'application  $f : \mathbf{Z}/10\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$  construite de la manière suivante est-elle bien définie ? Pour un élément  $c$  de  $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$ , on choisit un représentant  $x$  et on pose  $f(c) := [x]_3$ .

### Exercice 1

- 1 Montrer que  $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$  peut être muni d'une structure naturelle d'anneau.
- 2 Montrer que  $\mathbf{R}[X]$  est un anneau, et que pour tout  $a \in \mathbf{R}$ , l'ensemble

$$I_a = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid P(a) = 0\}$$

est un idéal de  $\mathbf{R}[X]$ .

### Exercice 2

- 1 Déterminer l'ordre de  $\bar{2}$  dans  $(\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}, +)$ .
- 2 Montrer que  $\{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$  est un sous-groupe de  $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}, +)$ .
- 3 Expliciter un sous-groupe d'ordre 6 de  $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}, +)$ .
- 4 Quels sont les ordres possibles des sous-groupes de  $(\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}, +)$  ?
- 5 Soient  $n$  un entier naturel non nul. Le but de cette question est de déterminer tous les sous-groupes de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Soit  $d$  un diviseur de  $n$ .
  - a) Expliciter un sous-groupe  $G_d$  de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  d'ordre  $d$ .
  - b) Soit  $H$  un sous-groupe de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  d'ordre  $d$ . Montrer que pour tout  $\bar{x} \in H$ ,  $d \cdot \bar{x} = 0$ . Combien d'éléments de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  vérifient cette équation ? En déduire que  $H = G_d$ .
  - c) Conclure.
- 6 Donner la liste de tous les sous-groupes de  $(\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}, +)$ .

## Exercices à chercher

### Exercice 3

Le but de cet exercice est de déterminer tous les morphismes d'anneaux de  $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$  dans un  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ .

- 1 Montrer que tout morphisme de groupes de  $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$  dans un  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  est déterminé par l'image de  $[1]_{10}$ .
- 2 Quelles sont les valeurs possibles pour l'image de  $[1]_{10}$  par un morphisme d'anneaux de  $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$  dans un  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  ?
- 3 Déterminer tous les morphismes d'anneaux de  $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$  dans un  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ .

#### Exercice 4

---

- 1 L'équation  $x^3 + x + 1 = 0$  a-t-elle des solutions dans  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ .
- 2 L'équation  $x^3 + x + 1 = 0$  a-t-elle des solutions dans  $\mathbf{Z}$  ?

#### Exercice 5

---

- 1 Quelle opération fait de  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  un groupe ?
- 2 Ce groupe est-il fini ?
- 3 Quel est l'ordre de  $7/12$  dans ce groupe ?
- 4 Montrer que tous les éléments de  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  sont d'ordre fini.