UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algébre et Arithmétique 3

Feuille n°1 : Groupes et sous-groupes de $\mathbf{Z}$

Exercices à savoir faire

Questions de cours

1 Soit $(G, \star)$ un groupe. Donner la définition du sous-groupe engendré par une partie P de G.
2 Soit $(G, \star)$ un groupe. Décrire le sous-groupe engendré par un élément g de G.
3 Décrire le sous-groupe engendré par un élément n de $(\mathbf{Z}, +)$.

Exercice 1

1 Dire si les couples suivants sont des groupes : $(\mathbf{Z}, +)$; $(\mathbf{Z}, \times)$; $(\mathbf{C}^*, +)$; $(\mathbf{C}^*, \times)$.
2 Déterminer une loi de composition interne pour laquelle $\{-1, 1\}$ est un groupe. Même question avec $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
3 Soit $(G, \star)$ un groupe et E un ensemble. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}(E, G)$ des applications de E dans G peut être muni d'une structure naturelle de groupe.
4 L'ensemble $\{a, b, c\}$ muni de la loi de composition interne définie par la table

$\star$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	b
c	c	b	a

admet-il un élément neutre ? est-il commutatif ? tout élément admet-il un symétrique ? est-il un groupe ?
5 La réunion de deux sous-groupes d'un groupe G est-elle un sous-groupe ? Et l'intersection ?
6 Donnner l'exemple d'un ensemble avec une loi de composition interne sans élément neutre.

Exercice 2

Soit $(E, \star)$ un ensemble muni d'une loi interne associative avec un élément neutre, noté ε.
1 Démontrer qu'il n'y a pas d'autre élément neutre.
2 Soit x un élément qui admet un symétrique x'. Démontrer qu'il n'y a pas d'autre symétrique.
3 Soit x et y dans E qui admettent un symétrique. Déterminer un symétrique de $x \star y$.

Exercice 3

1 Soit H un sous-groupe de $(\mathbf{Z}, +)$ contenant $\{2, 7\}$. Montrer que 1 est dans H.
2 Montrer que 1 est dans le sous-groupe de $(\mathbf{Z}, +)$ engendré par $\{2, 7\}$.
3 Quel est le sous-groupe engendré par $\{2, 7\}$?

Exercice 4

Soit a et b deux entiers non tous nuls et $< a, b >$ le sous-groupe de $(\mathbf{Z}, +)$ engendré par $\{a, b\}$.
1 Montrer que $a\mathbf{Z}$ est inclus dans $< a, b >$.
2 Montrer que $a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z}$ est inclus dans $< a, b >$.
3 Montrer que $a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbf{Z}, +)$, contenant $\{a, b\}$.
4 Montrer que $< a, b >$ est inclus dans $a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z}$.

5 Montrer que $< a, b >$ est $a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z}$.
6 Montrer que $< a, b >= a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z} = pgcd(a, b)\mathbf{Z}$.

Exercice 5

1 Déterminer $45\mathbf{Z} \cap 60\mathbf{Z}$.
2 Déterminer $56\mathbf{Z} + 63\mathbf{Z}$.
3 Trouver les sous-groupes de $\mathbf{Z}$ contenant $48\mathbf{Z}$ et donner les relations d'inclusion existant entre eux.

Exercice 6

1 L'application $F\ : (\mathbf{Z}, +) \to (\mathbf{Z}, +)$, $n \mapsto 1$ est-elle un morphisme de groupes ?
2 Déterminer deux morphismes de groupes de $(\mathbf{R}, +)$ vers $(\mathbf{R}_+^\star, \times)$.

Exercice 7

1 Soit F un morphisme de groupes de $(\mathbf{Z}, +)$ dans lui-même. Montrer qu'il suffit de connaître $F(1)$ pour connaître l'image de chaque entier par F.
2 Existe-t-il un morphisme de groupes de $(\mathbf{Z}, +)$ dans lui-même tel que $F(2) = 3$?
3 Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbf{Z}, +)$ dans lui-même tels que $F(2) = \ 4$?
4 Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ pour qu'il existe un morphisme de groupes de $(\mathbf{Z}, +)$ dans lui-même tel que $F(2) = a$ et $F(5) = b$ est : $5a = 2b$.

Exercices à chercher

Exercice 8

Soit $E = \{a, b\}$ un ensemble à deux éléments. On cherche à déterminer toutes les structures de groupes sur cet ensemble.
1 Si a est l'élément neutre, quel doit être le symétrique de b ? En déduire la table de multiplication dans ce cas.
2 Combien y a-t-il de structures de groupes différentes sur E ?

Exercice 9

Soit $E = \mathbf{Q}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, et $\star$ la loi de composition interne définie par :

$$(x, y) \star (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx').$$

$(E, \star)$ est-il un groupe ? commutatif ?

Exercice 10

Soit E un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Si $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on note $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ la *différence symétrique* de A et B. Montrer que pour toute partie A de E, $A^2 = A$ et que le triplet $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ forme un anneau commutatif.

Exercice 11

Soit G un groupe tel que $\forall x \in G, x \star x = e_G$.

Montrer que tout élément de G est son propre inverse. Calculer pour tout $(a, b) \in G^2$, le produit $a \star b \star a^{-1} \star b^{-1}$ et montrer que G est abélien.