Exercices sur les formes sesquilinéaires (I)

Exercice 1 (Décomposition de Bruhat)**.**

Décrire la décomposition de Bruhat d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL(2, k)$.

DÉFINITIONS

Exercice 2 (Formes très dégénérées)**.**

Déterminer toutes les formes sesquilinéaires symétriques, anti-symétriques et hermitiennes f sur un espace E avec $dim E = dim Ker f + 1$.

Exercice 3 (Isotropes)**.**

(1) Montrer que si un sous-espace d'un espace non-singulier (E, f) est totalement isotrope, il est de dimension inférieure à $\dim E/2$.

(2) Déterminer des vecteurs isotropes et un sous-espace totalement isotrope maximal pour les formes non dégénérées suivantes (données par leur forme quadratique associées). Dans chaque cas, on donnera l'indice, c'est à dire la dimension des sous-espaces totalement isotropes maximaux.

  (a) $k = \mathbb{R} : q = x^2 + y^2, x^2 - y^2, x^2 + y^2 - z^2, x^2 + y^2 + z^2 - t^2, x^2 + y^2 - z^2 - t^2$.

  (b) $k = \mathbb{C} : q = x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2$.

DÉCOMPOSITION ET CLASSIFICATION

Exercice 4.

(1) Quels sont les sous-espace propres de la matrice J de taille $n \times n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 ?

(2) Diagonaliser dans une base orthonormée pour le produit scalaire standard, la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$

$$f(x, y) = \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} x_i y_j + x_j y_i.$$

Discuter son rang et sa signature.

Exercice 5 (En caractéristique 2)**.**

Soit g la forme bilinéaire symétrique sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que g est non dégénérée. Peut-on compléter e_1 en une base orthogonale ?

Exercice 6 (Espace de matrices)**.**

Soit $E := M_n(\mathbb{R})$. Déterminer la signature des formes quadratiques

(1) $q_1(A) = trace(A^2)$. On cherchera des “grands” sous-espaces où q_1 est définie positive ou définie négative.
(2) $q_2(A) = trace(A^2) - (traceA)^2$.

THÉORÈME DE WITT

Exercice 7.

Soit $(E, q(xe_1 + ye_2) = 2xy)$ un plan hyperbolique orienté. Peut-on prolonger l'application u définie sur $vect(e_1)$ par $u(e_1) = e_2$ en une isométrie de E ? En une isométrie directe de E ?

Exercice 8 (Action des groupes orthogonaux)**.**

Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de la forme quadratique $q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ non dégénérée de signature $(1, 1)$. Le groupe $O(1, 1)$ est par définition le groupe des isométries de (E, q).

(1) Le groupe $O(1, 1)$ agit-il transitivement sur les droites de $\mathbb{R}^2$?
(2) Soit q une forme quadratique réelle non dégénérée. Montrer que si q a la même signature en restriction à F et à F' alors F et F' sont dans la même orbite sous l'action de $O(q)$.
(3) Décrire les orbites de l'action de $O(2, 1)$ sur les droites de $\mathbb{R}^3$.

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Exercice 9 (Droites et quadriques)**.**

Une quadrique d'un espace projectif $P(V)$ est le lieu des zéros d'une forme quadratique f sur V.

(1) Montrer que toute quadrique qui contient trois points distincts d'une droite d contient toute la droite d.
(2) Déterminer la dimension de l'espace des quadriques de $P^3(K)$.
(3) Soit d_1, d_2, d_3 trois droites de $P^3(K)$. Montrer qu'il existe une quadrique qui les contient.

Exercice 10 (Polarité)**.**

Soit $\mathcal{Q}$ une quadrique de $P(E)$ (muni d'un repère projectif) d'équation $q(x) = 0$ où q est la forme quadratique d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée f sur un espace vectoriel E. Si $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont deux sous-espaces orthogonaux dans E, on note $P(\overrightarrow{A}) \perp P(\overrightarrow{B})$. On appelle hyperplan polaire d'un point $A = P(\overrightarrow{A})$ de $P(E)$ l'hyperplan projectif $A^\perp := P(\overrightarrow{A}^\perp)$.

(1) On munit de plan projectif d'un repère. Déterminer une équation de la droite polaire du point $M(x_0, y_0, 1)$ par rapport à la quadrique d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. La représenter dans l'espace affine d'équation $z \neq 0$.
(2) Soit F un sous-espace non-isotrope de E. Soit A et B deux points de $P(F)$. Montrer si $A \perp B$ pour f alors $A \perp B$ pour $f_{|F}$.
(3) Soit $\mathcal{Q}$ une quadrique de $P^1(K)$ dont l'image est composée des deux points A et B. Montrer en utilisant un bon repère que pour tout M in $P^1(K)$,
$$M \perp N \iff M \text{ et } N \text{ sont conjugués harmoniques par rapport à } M \text{ et } N.$$
(4) En déduire une construction géométrique de la polaire d'un point par rapport à une conique.