Exercices sur le groupe symétrique et le groupe linéaire

Exercice 1 (Théorème de Sylow pour les groupes abéliens finis)

Soit $G = \{a_1, a_2, \cdots a_n\}$ un groupe fini. On note α_i l'ordre de l'élément a_i. Soit p un diviseur premier de $\mid G \mid$ l'ordre de G.

1. Montrer que l'application

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/\alpha_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\alpha_2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/\alpha_n\mathbb{Z} & \to & G \\ (\overline{h_1}, \overline{h_2}, \cdots, \overline{h_n}) & \mapsto & a_1^{h_1} a_2^{h_2} \cdots a_n^{h_n} \end{array}$$

   est une application bien définie. Démontrer que c'est un homomorphisme de groupes puis qu'il est surjectif.
2. En déduire que p divise $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n$.
3. Montrer qu'il y a dans G un élément d'ordre p.
4. En raisonnant par récurrence sur l'ordre du groupe et en considérant l'ensemble $G/ < x >$ où x est un élément d'ordre p dans G, montrer que G admet un p-Sylow.

Exercice 2

1. Soit G un groupe, a et b deux éléments d'ordre fini qui commutent. On suppose que les sous-groupes engendrés $< a >$ et $< b >$ ont une intersection réduite au singleton élément neutre $\{e\}$.
2. Montrer qu'une égalité $(ab)^m = e$ implique $a^m = e$ et $b^m = e$.
3. Calculer l'ordre de ab.
4. Montrer que si deux éléments d'un groupe ont des ordres premiers entre eux, l'intersection des sous-groupes qu'ils engendrent est réduite au singleton élément neutre.
5. Montrer que tout groupe abélien d'ordre 77 est cyclique.

Exercice 3

1. Soit $f \ : \mathfrak{S}_n \to A$ un homomorphisme de groupes de $\mathfrak{S}_n$ vers un groupe abélien. Démontrer que les transpositions ont toutes même image. Démontrer que si $A = \{1, -1\}$ $f = signature$ ou $f =$ application constante1.
2. Soit G d'indice 2 dans $\mathfrak{S}_n$. Démontrer que G est distingué (reprendre la méthode de la feuille 1) puis que $G = \mathfrak{A}_n$.

Exercice 4 (Simplicité de $\mathfrak{A}_5$)

1. Faire la liste des classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathfrak{A}_n$ en les dénombrant.
2. Montrer que les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$.
3. Montrer que les éléments d'ordre 2 sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$.
4. Montrer que tout sous-groupe distingué H de $\mathfrak{A}_n$ qui contient un élément d'ordre 5 les contient tous. (On remarquera que le groupe engendré par un élément d'ordre 5 est un Sylow.)
5. Montrer que tout sous-groupe distingué H de $\mathfrak{A}_n$ non réduit à $\{Id\}$ contient au moins deux types d'éléments en plus de l'identité. Montrer alors que $H = \mathfrak{A}_n$.

Exercice 5 (Les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$)

Le but de l'exercice est de déterminer les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ (pour $n \geq 5$).

1. Soit G un groupe et g un élément d'ordre 2 de G. Montrer que le sous-groupe engendré par g est distingué dans G si et seulement si g est dans le centre de G.
2. Donner l'exemple d'un sous groupe non distingué de $\mathfrak{S}_n$.
3. Soit H un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que $H \cap \mathfrak{A}_n$ est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}_n$. En déduire que H contient $\mathfrak{A}_n$ ou que $H \cap \mathfrak{A}_n = \{Id\}$?
4. On suppose que $H \cap \mathfrak{A}_n = \{Id\}$. Montrer que la restriction à H du morphisme signature est injective. En utilisant la première question, montrer que dans ce cas $H = \{Id\}$.
5. On suppose que H contient $\mathfrak{A}_n$. Montrer alors que $H = \mathfrak{S}_n$ ou $H = \mathfrak{A}_n$ suivant l'indice de H dans $\mathfrak{S}_n$.
6. Conclure : si $n \geq 5$, les seuls sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\{Id\}$, $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$..

Exercice 6

Le but de l'exercice est de déterminer les groupes dérivés successifs de $\mathfrak{S}_4$. On notera V_4 le sous-groupe des permutations de profil $(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)$ (avec l'identité).

1. Rappeler la démonstration du fait que le groupe dérivé $D(G)$ d'un groupe G est caractéristique donc distingué dans G.
2. Montrer que $D(\mathfrak{S}_4) \subset \mathfrak{A}_4$.
3. Calculer le commutateur de deux transpositions de support disjoint.
4. Calculer les commutateurs $(1,2)(1,3)(1,2)^{-1}(1,3)^{-1}$ et $(1,2,3)(1,2,4)(1,2,3)^{-1}(1,2,4)^{-1}$.
5. Montrer que $D(\mathfrak{S}_4)$ contient A_4.
6. En déduire que $D(\mathfrak{S}_4) = \mathfrak{A}_4$.
7. Montrer que $V_4 \subset D(\mathfrak{A}_4)$.
8. Vérifier que V_4 est distingué dans $\mathfrak{A}_4$ et que le quotient $\mathfrak{A}_4/V_4$ est un groupe abélien.
9. En déduire que $D(\mathfrak{A}_4) \subset V_4$.
10. En déduire $D^2(\mathfrak{S}_4)$.

11. Calculer les autres groupes dérivés de $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 7 (Groupe dérivé de $GL(3,\mathbb{F}_2)$ et de $SL(3,\mathbb{F}_2)$)

On travaille dans $GL(3,k)$ où $k=\mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{F}_3$. Que dire de $SL(n,\mathbb{F}_2)$?

1. Soit
$$t=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ et } s=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$
Montrer que le commutateur $tst^{-1}s^{-1}$ est une transvection.
2. Rappeler la démonstration du fait que deux transvections de $SL(3,k)$ sont conjuguées dans $SL(3,k)$.
3. Déterminer $D(SL(3,\mathbb{F}_2))$
4. Déterminer $D(GL(3,\mathbb{F}_2))$.

Exercice 8 (Groupe dérivé de $GL(2,k)$)

On travaille dans $GL(2,k)$ pour un corps k qui a au moins 4 éléments. Soit $g\in GL(2,k)$. On notera i_g l'automorphisme intérieur donné par g.

1. Démontrer qu'il existe un scalaire non nul $a\in k$ tel que $a^2\neq 1$. Que se passe-t-il dans $\mathbb{F}_2$ et dans $\mathbb{F}_3$?
2. Soit
$$t=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \text{ et } s=\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}.$$
Montrer que $T=tst^{-1}s^{-1}$ est une transvection.
3. Soit τ une transvection de $SL(2,k)$. Il existe $g\in GL(2,k)$ tel que $\tau=i_g(T):=gTg^{-1}$. Calculer τ à l'aide de g, s et t et montrer que $D(SL(2,k))$ contient toutes les transvections.
4. Déterminer $D(SL(2,k))$.
5. Déterminer $D(GL(2,k))$.

Exercice 9 (Groupe dérivé de $GL(2,\mathbb{F}_3)$)

On travaille dans $GL(2,\mathbb{F}_3)$.

1. Soit
$$t=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \text{ et } s=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$
Calculer $tst^{-1}s^{-1}$.
2. Déterminer $D(GL(2,k))$. Noter que ce calcul ne suffit pas pour déterminer $D(SL(2,k))$.