Exercices de géométrie projective

Exercice 1

Le but de l'exercice est de démontrer le théorème de Pappus affine : *Soit d et d' deux droites d'un plan affine E. Soit A, B, C (resp. A', B', C') trois points sur d (resp. sur d'.) Si les droites (AB') et (BA') sont parallèles ainsi que les droites (BC') et (CB'), alors les droites (CA') et (AC') le sont aussi.*

Dans le cas où d et d' sont sécantes en I

1. On considère l'homothétie h de centre I qui envoie A sur B. Déterminer l'image de B' par h.
2. On considère l'homothétie H de centre I qui envoie B sur C. Déterminer l'image de C' par H.
3. Déterminer l'image de A et celle de C' par $H \circ h$.
4. Conclure.

Comment raisonner dans le cas où d et d' sont parallèles ?

Exercice 2

Énoncer le théorème dual du théorème de Pappus.

Exercice 3 (Dessiner)

Soit Q un quadrilatère complet d'un plan projectif donné par quatre droites d_1, d_2, d_3 et d_4. Représenter Q après avoir envoyé à l'infini

1. seulement un sommet.
2. seulement un coté.
3. seulement une diagonale.

Exercice 4 (Coordonnées homogènes et birapport)

1. Soit $(A, B; C)$ un repère projectif de la droite projective $P^1 := P(k^2)$ dont le point unitaire est C. Soit M un point de P^1 de coordonnées homogènes $[X : Y]$. Calculer le birapport $[A, B, C, M]$.
2. Soit cinq points distincts A, B, C, D, E d'une droite projective. Calculer

$$[A, B, C, D][A, B, D, E][A, B, E, C].$$

Exercice 5 (Avec un repère projectif)

Dans un plan projectif réel, on considère le repère projectif $(A, B, C; I)$ dont le point unitaire est I. Soit A', B', C' respectivement sur $(BC), (CA)$ et (AB) tels que $(AA'), (BB')$ et (CC') soient concourantes en I. Montrer analytiquement que les points $P := (BC) \cap (B'C')$, $Q := (CA) \cap (C'A')$ et $R := (AB) \cap (A'B')$ sont alignés.

Exercice 6

Soit $F = P(f)$ une homographie d'une droite projective dans elle-même. À quoi correspondent en terme de f les points fixes de F ? Montrer que si F admet trois points fixes deux à deux distincts, F est l'identité.

Exercice 7 (Perspective)

Soit $\overrightarrow{V}$ un espace vectoriel et $P := P(\overrightarrow{V})$.

1. Soit F et G deux sous-espaces projectifs de P tels que $\dim F + \dim G \geq \dim P$. Montrer que $F \cap G \neq \emptyset$.
2. Soit F et G deux sous-espaces projectifs disjoints de P. Montrer qu'il existe un unique sous-espace projectif $< F, G >$ de P de dimension $\dim F + \dim G + 1$ contenant F et G.
3. Soit F et G deux sous-espaces projectifs disjoints de P tels que $\dim F + \dim G = \dim P - 1$. Quel est le domaine de définition de l'application (appelée perspective) ?

$$\begin{array}{ccccc} P(\overrightarrow{V}) & \rightarrow & G & \subset & P(\overrightarrow{V}) \\ M & \mapsto & G \cap < M, F > & = & P(\overrightarrow{G} \cap (\overrightarrow{M} \oplus \overrightarrow{F})) \end{array}$$

Montrer que c'est une application projective.

Exercice 8 (Une construction)

Donner une construction à l'aide d'une règle non graduée de la droite passant par un point M du plan et parallèle à deux droites parallèles d et d' données.

Exercice 9

Etant donné un point P et deux droites d, d' dont l'intersection Q est en dehors de la feuille, construire à la règle la droite (PQ).

Le site

`http://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/Cindy/menucindy.html`

propose des constructions projectives.