UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Théorie géométrique des groupes

Examen Juin 2009 (seconde session)

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses. Il est bon de relire sa copie...

Durée : 2 heures

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (5 points)

1 Donner la liste des éléments du groupe D des isométries qui conservent un hexagone régulier.
2 Donner un 3-Sylow de ce groupe.
3 Quels sont les ordres possibles d'éléments d'un 2-Sylow de D ?
4 Expliciter un 2-Sylow de D.
5 Est-il distingué dans D ?
6 Combien D a-t-il de 2-Sylow ?

Exercice 2 (5 points)

1 Combien le groupe $\mathfrak{A}_5$ a-t-il d'éléments d'ordre 3 ?
2 Montrer que les déplacements qui conservent un nombre fini $A_1, A_2, \cdots A_n$ de points du plan euclidien sont des rotations d'ordre fini dont on précisera le centre.
3 Le groupe $\mathfrak{A}_5$ peut-il être le groupe des déplacements qui conservent un nombre fini de points du plan euclidien ?
4 Le groupe $\mathfrak{A}_5$ peut-il être le groupe des isométries qui conservent un nombre fini de points du plan euclidien ? (Indication : Quel serait alors le sous-groupe des déplacements ?)

Tourner S.V.P.

Exercice 3 (5 points)

1 Soit d et d' deux droites du plan projectif $P^2(\mathbf{R})$ et O un point hors de $d \cup d'$ (figure 1). Construire l'axe de la projection de d sur d' depuis O.
2 Deux droites se coupent en dehors de la feuille en un point I. Soit A un point de la feuille. Construire la droite (AI). (voir figure 2)

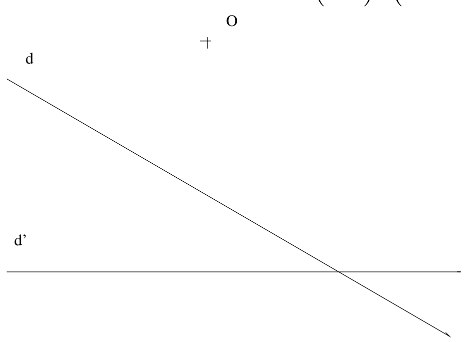

fig 1

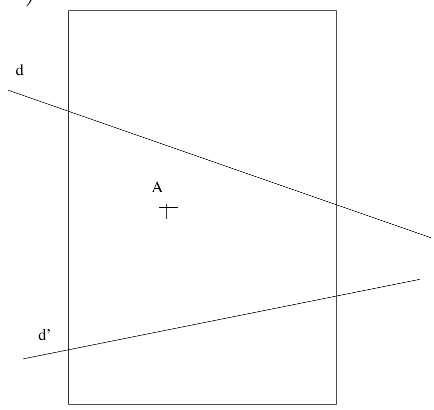

fig 2

Exercice 4 (5 points)

1 Déterminer si possible un plan totalement isotrope pour chacune des formes bilinéaires symétriques données par les formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{C}^4$.

$$P(x, y, z, t) = xy + zt$$

et

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

2 L'entier -3 est-il un carré modulo 7 ?
3 Déterminer si possible un vecteur non-nul isotrope pour chacune des formes bilinéaires symétriques données par les formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{F}_7^4$.

$$R(x, y, z, t) = xy + zt$$

et

$$S(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

Le corrigé sera disponible sur internet.