Théorie géométrique des groupes

Examen Mai 2009 (corrigé)

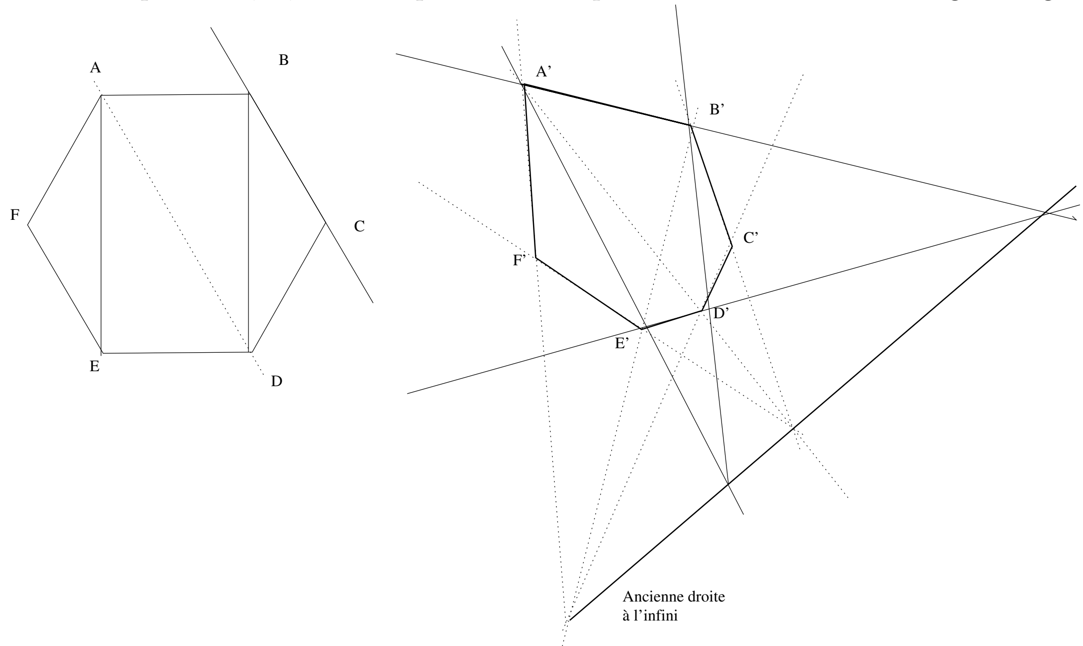
Exercice 1

Soit n un entier supérieur à 3. Soit D_{2n} le groupe des isométries d'un polygone régulier P à n côtés d'un plan euclidien réel. Comme toutes les isométries sont affines, l'isobarycentre G des sommets de P est conservé. Les éléments de D_{2n} de déterminant positif sont donc des rotations de centre G, et ceux de déterminant négatif des symétries orthogonales par rapport à des droites passant par G. Comme une rotation qui a deux points fixes est l'identité, les rotations sont d'ordre inférieur à n. Il n'y a donc que les n rotations d'angle multiple de $2\pi/n$. Comme la composée de deux symétries d'axe passant par G est une rotation, il y a aussi exactement n symétries, obtenues comme produit des n rotations par une symétrie fixée.

L'application $\det : D_{2n} \to \{-1, 1\}$ est un morphisme de groupes qui a pour image le groupe commutatif $\{-1, 1\}$ et pour noyau le groupe commutatif R_n des rotations de centre G d'angle multiple de $2\pi/n$. Le groupe dérivé $D^{(1)}(D_{2n})$ de D_{2n} est donc inclus dans le sous-groupe commutatif des rotations. Par conséquent, le deuxième groupe dérivé $D^{(2)}(D_{2n}) = \{Id\}$ et D_{2n} est résoluble.

Exercice 2

Soit 6 points $A, B, \cdots F$ du plan $\mathbf{R}^2$ tels que $ABCDEF$ soit un hexagone régulier,



Etant données les images $A' = h(A)$, $B' = h(B)$, $D' = h(D)$ et $E' = h(E)$ par une homographie h de $P^2(\mathbf{R})$ dans lui-même, pour construire à la règle les images des autres points, on commence par déterminer l'ancienne droite à l'infini, en déterminant les points d'intersection d'image de couple de droites parallèles.

Exercice 3

es formes bilinéaires symétriques données par les formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{F}_7^3$, $q(x,y,z) = x^2 + 6y^2 + 2z^2$ et $Q(x,y,z) = xy + 3z^2$ ont pour matrice dans la base canonique

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et sont non-dégénérées de discriminant 5 et 1. Comme $5^{\frac{7-1}{2}} = -1[7]$, 5 n'est pas un carré alors que $1 = 1^2$ en est un, les formes ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 4

oit (E, f) et $(E, f')'$ deux espaces symplectiques non-singuliers de dimension 4. Soit $d \subset E$ et $d' = vect(x') \subset E'$ deux droites et f une application linéaire bijective de d sur d'. On écrit $d = vect(x)$ et $d' = vect(x')$ où $x' = f(x)$.

Notons que comme d et d' sont de dimension 1 donc isotropes, f est une isométrie (pour les formes bilinéaires induites). Puisque f est non dégénérée, on choisit un vecteur z (non colinéaire à x) tel que $f(x,z)$ est non nul donc inversible dans k. On définit y sous la forme $y = \alpha x + f(x,z)^{-1}z$. Alors, (x,y) est une paire symplectique. L'orthogonal de $vect(x,y)$ (muni de la forme induite) est un plan non-singulier puisque $vect(x,y)$ est non-singulier. Par la construction précédente, on y trouve une paire symplectique (X,Y). Le même raisonemment permet de trouver une base (x', y', X', Y') de E' telle que (x', y') et (X', Y') soient deux paires symplectiques orthogonales de E'. L'application f définie par $x \mapsto x'$, $y \mapsto y'$, $X \mapsto X'$ et $Y \mapsto Y'$ est une isométrie de E sur E' qui prolonge f.