Géométrie Euclidienne

Examen Mai 2009 (corrigé)

Exercice 1

Écrire la table de toutes les isométries d'un espace affine euclidien de dimension 3.

Exercice 2

On munit le plan affine euclidien $(P, <,>)$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère les points A de coordonnées $(-2, 1)$ et B de coordonnées $(4, 4)$.

1 Comme la somme des masses $2 + 1$ est non nulle, le barycentre est bien défini. L'abscisse de G est $\frac{2\times(-2)+1\times 4}{2+1} = 0$ et l'ordonnée $\frac{2\times 1+1\times 4}{2+1} = 2$.

2 $2GA^2 + GB^2 = 2((-2)^2 + (1-2)^2) + (4^2 + (4-2)^2) = 30$.

3 Soit M un point du plan P.

$$\begin{aligned} 2MA^2 + MB^2 &= 2\vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 = 2(\vec{MG} + \vec{GA})^2 + (\vec{MG} + \vec{GB})^2 \\ &= 3\vec{MG}^2 + < \vec{MG}, 2\vec{GA} + \vec{GB} > + 2\vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 \\ &= 3MG^2 + 2GA^2 + GB^2. \end{aligned}$$

4 Soit M un point du plan P.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{L} &\iff 2MA^2 + MB^2 = 42 \iff 3MG^2 + 2GA^2 + GB^2 = 42 \\ &\iff 3MG^2 + 30 = 42 \iff MG^2 = 4. \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathcal{L}$ est donc le cercle de centre G et de rayon 2.

Exercice 3

1 On identifie le plan affine $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire standard à l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ muni du produit scalaire $(z, z') = re(z\overline{z'})$ par l'application linéaire $(1, 0) \mapsto 1$, $(0, 1) \mapsto i$.

a. $z \mapsto 3z + 4$ ne représente pas une isométrie à cause du facteur 3.

b. $z \mapsto 3\overline{z} + 4$ ne représente pas une isométrie à cause du facteur 3.

c. $z \mapsto \overline{z} + 4$ représente une isométrie, indirecte (présence de la conjugaison). Il s'agit de la réflexion par rapport à l'axe des abscisses $z \mapsto \overline{z}$ composée par la translation de vecteur $4\vec{\imath}$ dans la direction de l'axe des abscisses. C'est donc une symétrie glissée.

d. $z \mapsto i\overline{z}+4$ représente une isométrie, indirecte (présence de la conjugaison). Il s'agit de la réflexion s par rapport à l'axe des abscisses $z \mapsto \overline{z}$ composée par $z \mapsto iz$, la rotation r de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$ puis par la translation t de vecteur $4\vec{\imath}$. On peut écrire $r \circ s = (s' \circ s) \circ s = s'$ où s' est la réflexion par rapport à la droite d' d'équation $y = x$. On décompose ensuite $4\vec{\imath} = 2(\vec{\imath} + \vec{\jmath}) + 2(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$ comme somme d'un vecteur $\vec{v}_2 := 2(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$ directeur de d' et d'un vecteur $\vec{v}_1 := 2(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$ normal à d'. On en déduit $t \circ s' = t_{\vec{v}_2} \circ t_{\vec{v}_1} \circ s' = t_{\vec{v}_2} \circ s''$ où s'' est la réflexion par rapport à la droite $d'' = d' + \frac{\vec{v}_1}{2}$ parallèle à d'. Maintenant, $t \circ r \circ s = t \circ s' = t_{\vec{v}_2} \circ s''$. Comme $\vec{v}_2$ est parallèle à d'', il s'agit d'une symétrie glissée.

Exercice 4

1 Soit A, B, C sont trois points distincts d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$. La somme des angles de vecteurs se réécrit par symétrie centrale par rapport à C comme

$$\begin{aligned}
&((\vec{AB}, \vec{AC})) + ((\vec{BC}, \vec{BA})) + ((\vec{CA}, \vec{CB})) \\
&= ((\vec{AB}, \vec{AC})) + ((\vec{BC}, \vec{BA})) + ((-\vec{CA}, -\vec{CB})) \\
&= ((\vec{AB}, \vec{AC})) + ((\vec{BC}, \vec{BA})) + ((\vec{AC}, \vec{BC})) \\
&= ((\vec{AB}, \vec{AC})) + ((\vec{AC}, \vec{BC})) + ((\vec{BC}, \vec{BA})) \\
&= ((\vec{AB}, \vec{BA}))
\end{aligned}$$

c'est à dire l'angle plat.

2 Soit $\mathcal{C}$ un cercle de $\mathcal{P}$ et A un point de $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{C}'$ l'image par une rotation r de centre A du cercle $\mathcal{C}$. Soit B l'autre point d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Soit D le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à A sur $\mathcal{C}$. Soit $D' = r(D)$ son image par r. Soit O le centre de $\mathcal{C}$ et O' le centre de $\mathcal{C}'$.

Comme D appartient à (AO), le point $D' = r(D)$ appartient à $r((AO)) = (A'O')$. Donc $[A'D']$ est un diamètre de $\mathcal{C}'$. Comme B appartient à $\mathcal{C}$ et comme $[AD]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$, la droite (BD) est orthogonale à (AB). De même, comme B appartient à $\mathcal{C}'$ et comme $[AD']$ est un diamètre de $\mathcal{C}$, la droite (BD') est orthogonale à (AB). Par conséquent, les droites (BD) et (BD') sont confondues et D, D' et B sont alignés.

3 Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}$. Dans les triangles BAM' et BAM

$$((\vec{BM'}, \vec{BA})) + ((\vec{AB}, \vec{AM'})) + ((\vec{M'A}, \vec{M'B}))$$

et

$$((\vec{BA}, \vec{BM})) + ((\vec{AM}, \vec{AB})) + ((\vec{MB}, \vec{MA}))$$

sont deux angles plats. Par somme,

$$((\vec{BM'}, \vec{BM})) + ((\vec{AM}, \vec{AM'})) + ((\vec{M'A}, \vec{M'B})) + ((\vec{MB}, \vec{MA}))$$

est un angle nul.

Par propriété des angles inscrits, $((\vec{M'A}, \vec{M'B})) = ((\vec{D'A}, \vec{D'B}))$ et $((\vec{MB}, \vec{MA})) = ((\vec{DB}, \vec{DA}))$. Dans le triangle ADD', on trouve que

$$((\vec{D'A}, \vec{D'B})) + ((\vec{DB}, \vec{DA}))$$

et la différence d'un angle plat et de $((\vec{AD}, \vec{AD'})) = ((\vec{AM}, \vec{AM'}))$ l'angle de la rotation. En conséquence, $((\vec{BM'}, \vec{BM}))$ est un angle plat et M, $M' = r(M)$ et B sont alignés.

Exercice 5

Soit $\mathbb{R}^2$ le plan affine euclidien muni du produit scalaire standard et de la base canonique.

1 La matrice A de la forme bilinéaire symétrique donnée en coordonnées par

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) = xx' + 19yy' + 12xy' + 12x'y$$

est

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 12 & 19 \end{pmatrix}$$

2 On trouve que $e_1 + 2e_2$ est vecteur propre de A de valeur propre 25 et $2e_1 - e_2$ est vecteur propre de A de valeur propre -5.

3 Comme la matrice A est inversible, la conique d'équation

$$x^2 + 19y^2 + 24xy + 5y = 0$$

est une conique à centre. Comme les valeurs propres de A sont de signe opposé, il s'agit d'une hyperbole.