Correction d'exercices

sur les espaces vectoriels euclidiens

Exercice 10 (Rotation)

$\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel.

1 - L'ensemble des vecteurs colonnes de A forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$: ils sont deux à deux orthogonaux et de norme 1.

La matrice A est donc orthogonale.

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\det\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 3C_1 - C_2 & & 2C_3 + C_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 7 & 2 & 14 \\ 21 & -3 & -7 \end{pmatrix} \end{array} = -\det\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & -7 \end{pmatrix}$$

$$= -7\times 7\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7^3$$

donc $\det A = 1$

Par conséquent, A est la matrice d'une isométrie de déterminant 1, donc d'une rotation.

2 - Soit $V\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$V \in$ axe $\iff AV = V \iff (A - I)V = 0$

$$\iff \begin{cases} -5x + 6y - 3z = 0 \\ 3x - 5y + 6z = 0 \\ 6x - 3y - 9z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -5x + 6y - 3z = 0 & \\ -7x + 7y = 0 & L_2 + 2L_1 \\ -21x + 21y = 0 & -L_3 + 3L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = x \\ y = 3z \end{cases}$$

Un vecteur unitaire de l'axe est donc $\frac{1}{\sqrt{19}}\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} = V_1$

3 - Le vecteur $V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est orthogonal à V_1

$V_3 = V_1 \wedge V_2 = \frac{1}{\sqrt{38}}\begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix}$ complète $\{V_1, V_2\}$ en une base orthonormée.

4 - Puisque V_1 est dans l'axe de la rotation, $f(V_1) = V_1$.

Puisque $V_2 \perp V_1$ et que f est orthogonale (donc préserve l'orthogonalité) $f(V_2) \perp f(V_1)$ donc $f(V_2) \perp V_1$. Donc

$$\mathrm{Mat}\left(f, (V_1, V_2, V_3)\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{A'} \end{array}\right).$$

Puisque (V_1, V_2, V_3) est orthonormée, et que f est orthogonale $\mathrm{Mat}(f, (V_1, V_2, V_3))$ est orthogonale. Par conséquent, A' est orthogonale.

De plus $\det A' = \det A = 1$. Donc A' est de la forme

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

Or $\mathrm{Trace}(A) = \frac{2}{7} = \mathrm{Trace}\left(\mathrm{Mat}(f, (V_1, V_2 V_3))\right) = 1 + 2\cos\theta$

Par conséquent, $\cos\theta = -\frac{5}{14}$.

Puisque (V_1, V_2, V_3) est orthonormée, $\sin\theta = \langle f(V_2), V_3 \rangle$

$$\sin\theta = {}^t(A V_2)\, V_3 = \frac{1}{14\sqrt{19}} \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2 & 3 & 6\\ 6 & 2 & -3 \\ -3 & 6 & -2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix}$$

$$= \frac{-57}{14\sqrt{19}} = -\frac{3\sqrt{19}}{14}$$

Ainsi, $\mathrm{Mat}\left(f(V_1, V_2, V_3)\right) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}14 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3\sqrt{19} \\ 0 & -3\sqrt{19} & -5\end{pmatrix}$

Exercice 14 (Projection orthogonale)

1 - Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit p une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F de E.

Soit $(x, y) \in E^2$

$$\langle p(x), y \rangle = \langle p(x), y - p(y) + p(y) \rangle = \langle p(x), y - p(y) \rangle + \langle p(x), p(y) \rangle$$

$$= \langle p(x), p(y) \rangle \quad \text{car} \quad p(x) \in F \text{ et } y - p(y) \in F^{\perp}$$

$$= \langle x, p(y) \rangle$$

Donc p est auto-adjoint.

Par conséquent, la matrice de p dans une base orthonormée est symétrique.

2 - Soit p une projection sur un sous-espace vectoriel F parallèlement à un sous-espace G de E.

Soit $x \in F$ et $y \in G$

$$\langle x, y \rangle = \langle \pi(x), y \rangle \quad \text{car} \quad x \in F$$

$$= \langle x, \pi(y) \rangle \quad \text{car} \quad \pi \text{ est auto-adjointe}$$

$$= 0 \quad \text{car} \quad \cancel{\pi}y \in G \text{ et donc } \pi(y) = 0.$$

Donc $F \perp G$ et p est une projection orthogonale.

3 - On vérifie que $A^2 = A$. L'endomorphisme f est donc une projection. Puisque la matrice de f dans une base orthonormée est symétrique, f est auto-adjointe donc, d'après le 2. f est une projection orthogonale.

Puisque A est de rang 1, on vérifie que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 12 (Sur les involutions)

1 - L'endomorphisme u a pour polynôme annulateur $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ scindé avec des racines simples. Il est donc diagonalisable

2 - Soit E_1 (resp. E_{-1}) le sous-espace propre (s'il est non réduit à 0) de u associé à la valeur propre 1 (resp. -1). Soit $v \in E_1$ et $w \in E_{-1}$. Comme u est orthogonale

$$\langle u(v), u(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$
$$= \langle v, -w \rangle$$

Donc $\langle v, w \rangle = 0$ et $E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_{-1} = E$.

3 - Soit $x \in E$

$$\| u_a(x) \|^2 = \left\| x - 2 \frac{\langle x|a \rangle}{\langle a|a \rangle} a \right\|^2 = \|x\|^2 - 4 \frac{\langle x|a \rangle}{\langle a|a \rangle} \langle x|a \rangle + \left(2 \frac{\langle x|a \rangle}{\langle a|a \rangle} \right)^2 \|a\|^2$$
$$= \|x\|^2$$

Donc u est orthogonale.

Soit $x \in E$

Si $x \in a^\perp$ $\quad u_a(u_a(x)) = u_a(x) = x$

Si $x \in \mathrm{Vect}\, a$ $\quad \exists \lambda \,/\, x = \lambda a \quad u_a(x) = \lambda u_a(a) = -\lambda a = -x$

$$u_a(u_a(x)) = u_a(-x) = -u_a(x) = -(-x) = x.$$

Donc, puisque $E = a^\perp \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}\, a$, $u_a^2 = Id$ et u_a est une involution.

4 - Soit u une involution orthogonale et w une transformation orthogonale. Comme composée d'applications orthogonales, $w u w^{-1}$ est orthogonale.

$(w v w^{-1})^2 = w v^2 w^{-1} = w \, Id \, w^{-1} = Id$. Donc $w v w^{-1}$ est une involution.

Soit $x \in w(\mathrm{Ker}(u - Id))$. Il existe $y \in \mathrm{Ker}(u - Id) \,/\, x = w(y)$

$$w u w^{-1}(x) = w u w^{-1} w(y) = w u(y) = w(y) = x.$$

Donc $w(\mathrm{Ker}(u - Id)) \subset \mathrm{Ker}(w u w^{-1} - Id)$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(\omega u \omega^{-1} - Id)$ $\quad x = \omega(u\omega^{-1}(x))$ donc $x \in \mathrm{Im}\,\omega$

$(u-I)(u\omega^{-1}(x)) = u^2\omega^{-1}(x) - u\omega^{-1}(x) = u\omega^{-1}(x) - u\omega^{-1}(x) = 0.$

Donc $u\omega^{-1}(x) \in \mathrm{Ker}\, u - Id$ et $x \in \omega(\mathrm{Ker}(u - Id))$.

Donc $\omega(\mathrm{Ker}(u - Id)) = \mathrm{Ker}(\omega u \omega^{-1} - Id)$.

5- $\mathrm{Ker}(u_a - Id) = a^{\perp}$ - Il faut donc trouver ω qui envoie $a^{\perp}$ sur $b^{\perp}$

Soit ω une transformation orthogonale qui envoie $\frac{a}{\|a\|}$ sur $\frac{b}{\|b\|}$.

Il en existe une car les deux vecteurs sont de même norme.

Par orthogonalité ω envoie $a^{\perp}$ sur $b^{\perp}$, et ω^{-1} envoie $b^{\perp}$ sur $a^{\perp}$

Soit $x \in E$. Si $x \in b^{\perp}$ $\quad \omega^{-1}(x) \in a^{\perp}$ $\quad u_a\,\omega^{-1}(x) = \omega^{-1}(x)$

$$\omega u_a \omega^{-1}(x) = x = u_b(x)$$

Si $x \in \mathrm{Vect}\, b$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ / $\quad x = \lambda \frac{b}{\|b\|}$

$$\omega u_a \omega^{-1}(x) = \omega u_a \omega^{-1}\left(\lambda \frac{b}{\|b\|}\right) = \lambda\,\omega u_a\left(\frac{a}{\|a\|}\right) = \lambda\,\omega\left(-\frac{a}{\|a\|}\right) = -\lambda \frac{b}{\|b\|}$$

$$= -x = u_b(x).$$

Comme $b^{\perp} \oplus \mathrm{Vect}\, b = E$ $\qquad \omega u_a \omega^{-1} = u_b$.