Université Pierre et Marie Curie 2003/2004
Licence E Algèbre et Géométrie

Correction des exercices sur les espaces vectoriels euclidiens

Exercice 1.

On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ muni du produit scaleire euclidien usuel, et d'une base orthonormée. L'inégalité de Cauchy-Schwartz appliquée aux vecteurs $(1, 1, \cdots, 1)$ et $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ donne le résultat.

Exercice 2.

Puisque $F \subset F + G$, $(F+G)^\perp \subset F^\perp$. De même, $(F+G)^\perp \subset G^\perp$ et donc $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$. Il y a égalité car si $x \in F^\perp \cap G^\perp$, pour tout $(f, g) \in F \times G$ on a $(x|f+g) = (x|f) + (x|g) = 0$ et donc $x \in (F+G)^\perp$. Maintenant en appliquant le résultat démontré au couple $(F^\perp, G^\perp)$, on obtient $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$ car $(F^\perp + G^\perp)^\perp = \left(F^\perp\right)^\perp \cap \left(G^\perp\right)^\perp = F \cap G$.

Exercice 3.

On choisit d'abord $V_1' = v_1$ et

$$V_1 = \frac{V_1'}{\|V_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Puis

$$V_2' = v_2 - (v_2, V_1)V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } V_2 = \frac{V_2'}{\|V_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Enfin,

$$V_3' = v_3 - (v_3, V_1)V_1 - (v_3, V_2)V_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } V_3 = \frac{V_3'}{\|V_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La base $V_1, V_2, V_3)$ est orthonormée.

Exercice 4.

Puisque $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^4$, il suffit de trouver des bases orthonormées de F et $F^\perp$. Si $u = v_1 + \lambda v_2$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), $(u, v_1) = 2 + \lambda$ et il apparait que $u_2' = (v_1 - 2v_2) \perp v_1$. Posons $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_1$ et $u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -1, 2, -2)$. (u_1, u_2) est une base orthonormée de F.

Si $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $u \in F^\perp$ si et seulement si

$$0 = (u, v_1) = x + y \ \ et \ \ 0 = (u, v_2) = y - z + t\ .$$

On en déduit que $v_3 = (0,0,1,1)$ et $v_4 = (1,-1,0,1)$ sont dans $F^{\perp}$. Comme (v_3, v_4) est manifestement un système libre et que $dim\, F^{\perp} = 4 - dim\, F = 2$, (v_3, v_4) est une base de $F^{\perp}$. Posons $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_3$. Si $u = v_3 + \lambda v_4$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), $(u, v_3) = 2 + \lambda$ et $u_4' = (v_3 - 2v_4) \perp v_3$. Posons $u_4 = u_4' / \|u_4\| = \frac{1}{\sqrt{10}}(-2,2,1,-1)$. (u_3, u_4) est une base orthonormée de $F^{\perp}$.

(u_1, u_2, u_3, u_4) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5.

(1) Faux, ce n'est vrai que dans une base orthonormée.

(2) Faux, ce n'est vrai que dans une base orthonormée dont le premier vecteur dirige l'axe de la rotation.

Exercice 6.

(1) L'équation de H peut se traduire en disant que le vecteur de coordonnées (x, y, z) appartient à H si et seulement s'il est orthogonal au vecteur de coordonnées $(1,2,2)$. On prend $\epsilon_1 = \frac{1}{3}(1,2,2)$.

(2) Soit V un vecteur de E. Par définition de la projection orthogonale sur H, $V - \pi(V)$ appartient à $H^{\perp} = vect(\epsilon_1)$. De plus $(V - \pi(V), \epsilon_1) = (V, \epsilon_1)$, car $\pi(V) \perp \epsilon_1$. Donc, $V - \pi(V) = (V, \epsilon_1)\epsilon_1$. D'où
$$\pi(V) = V - (V, \epsilon_1)\epsilon_1.$$

(3) En calculant les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^3$, on trouve
$$Mat(\pi, \text{base canonique}) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$
Cette matrice est symétrique mais pas orthogonale. Ceci est dû au fait que π est une projection orthogonale et donc pour tout $(V, W) \in E^2$, $(V, \pi(W)) = (\pi(V), \pi(W)) = (\pi(V), W)$ mais π ne conserve pas les normes.

En notant que $s = \pi - (Id - \pi) = -Id + 2\pi$, on trouve
$$Mat(\pi, \text{base canonique}) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est symétrique et orthogonale. Ceci est dû au fait que s est un endomorphisme symétrique et orthogonal.

Exercice 7.

Puisque φ est linéaire, f l'est aussi. Supposons que f soit une isométrie vectorielle. Alors,
$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \|f(x)\|^2 = \|x\|^2 + 2\varphi(x)(x|a) + \varphi(x)^2 \|a\|^2$$
c'est à dire

(1)
$$\forall x \in E,\ 0 = \varphi(x)\left[2(x, a) + \varphi(x)\|a\|^2\right].$$

En particulier, $0 = \varphi(a)[2 + \varphi(a)]\|a\|^2$ et donc $\varphi(a) = 0$ ou $\varphi(a) = -2$.

Si $\varphi(a) = -2$, $\varphi \neq 0$ et (1) évaluée pour un élément x de $E \backslash Ker\,\varphi$ donne $\varphi(x) = -2\frac{(x|a)}{\|a\|^2}$. Lorsque $x \in Ker\,\varphi$, on $(x|a) = (f(x)|f(a)) = (x|-a)$ et donc $(x|a) = 0 = \varphi(x)$. Par conséquent, $\varphi = -2\frac{(.|a)}{\|a\|^2}$; f est la symétrie orthogonale par rapport à $a^\perp$ et $a^\perp = Ker\,\varphi$.

Si $\varphi(a) = 0$, alors $f(a) = a$ et pour tout $x \in E$, $(x|a) = (f(x)|a) = (x|a) + \varphi(x)\|a\|^2$ et donc $\varphi = 0$; $f = Id_E$.

Exercice 8.

Soient E un plan vectoriel euclidien et s (resp. σ) une symétrie orthogonale par rapport à une droite D (resp. Δ). Les symétries s et σ commutent si et seulement si $\sigma \circ s \circ \sigma^{-1} = s$. On sait par le cours que $\sigma \circ s \circ \sigma^{-1}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $s(\Delta)$. s et σ commutent donc si et seulement si $\sigma(D) = D$. Puisque D est une droite, cette condition est équivalente à ce que D est un sous-espace propre de σ. Ainsi, s et σ commutent si et seulement si $D = \Delta$ ou $D = \Delta^\perp$. Finalement lorsque $s \neq \sigma$, $\sigma \circ s = s \circ \sigma$ si et seulement si $D \perp \Delta$.

Exercice 9.

Soit H un hyperplan et s la symétrie orthogonale par rapport à H. Supposons que $s(a) = b$. Alors $s(b) = (s \circ s)(a) = a$ et donc $s(a-b) = b - a$. Par conséquent $a - b$ appartient à $E_{-1}(s)$ c'est à dire à la droite $H^\perp$. Comme $a \neq b$, $H^\perp = \mathbb{R}(a-b)$ et donc $H = (a-b)^\perp$. Supposons maintenant que $H = (b-a)^\perp$. Alors l'égalité $(a+b|a-b) = \|a\|^2 - \|b\|^2 = 0$ et la décomposition $a = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b)$donne que $s(a) = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b) = b$.

En conclusion, la seule symétrie orthogonale hyperplane échangeant a et b est la symétrie d'axe $(b-a)^\perp$.

Exercice 13.

(1) Si C est une constante strictement positive qui convient, pour le cas particulier où tous les a_i et tous les b_i valent t, on trouve

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \ nt^2 \leq Cn^2t^4.$$

Ceci implique (en faisant tendre t vers 0) que C est arbitrairement grand. Contradiction.

(2) C'est l'énoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$. On peut prendre $C = 1$.

(3) Si $n = 1$, $C = 1$ convient. Si $n > 1$, si C est une constante strictement positive qui convient, pour le cas particulier où tous les a_i et tous les b_i sont nuls sauf $a_1 = 1$ et $b_2 = 1$, on trouve $0 \geq C$, ce qui est contradictoire.