UNIVERSITÉ DE RENNES 1

## Géométrie Euclidienne

*Examen Mai 2009*

---

*Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses. Il est bon de relire sa copie...*

Durée : 2 heures Le barème est donné à titre indicatif.

---

### Exercice 1 (4 points)

Écrire la table de toutes les isométries d'un espace affine euclidien de dimension 3.

### Exercice 2 (4 points)

On munit le plan affine euclidien $(P, <, >)$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère les points $A$ de coordonnées $(-2, 1)$ et $B$ de coordonnées $(4, 4)$.

**1** Déterminer les coordonnées du barycentre $G$ des points massiques $A(2)$ et $B(1)$.

**2** Calculer $2GA^2 + GB^2$.

**3** Démontrer que pour tout point $M$ du plan, on a

$$2MA^2 + MB^2 = 3MG^2 + 2GA^2 + GB^2.$$

**4** Déterminer l'ensemble $\mathcal{L}$ des points $M$ du plan tels que $2MA^2 + MB^2 = 42$.

### Exercice 3 (4 points)

**1** On identifie le plan affine $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire standard à l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ muni du produit scalaire $(z, z') = re(z\overline{z'})$ par l'application linéaire $(1, 0) \mapsto 1$, $(0, 1) \mapsto i$. Parmi les transformations suivantes, lesquelles sont des isométries du plan euclidien

a. $z \mapsto 3z + 4$

b. $z \mapsto 3\overline{z} + 4$

c. $z \mapsto \overline{z} + 4$

d. $z \mapsto i\overline{z} + 4$

**2** Pour chacune des isométries, dire s'il s'agit d'une translation, d'une rotation ... (sans préciser les éléments caractéristiques).

## Exercice 4 (4 points)

**1** Démontrer que si $A, B, C$ sont trois points distincts d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ la somme des angles de vecteurs

$$((\vec{AB}, \vec{AC})) + ((\vec{BC}, \vec{BA})) + ((\vec{CA}, \vec{CB}))$$

est un angle plat.

**2** Soit $\mathcal{C}$ un cercle de $\mathcal{P}$ et $A$ un point de $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{C}'$ l'image par une rotation $r$ de centre $A$ du cercle $\mathcal{C}$. Soit $B$ l'autre point d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Soit $D$ le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à $A$ sur $\mathcal{C}$. Soit $D' = r(D)$ son image par $r$. Montrer que $D$, $D'$ et $B$ sont alignés.

**3** Soit $M$ un point quelconque de $\mathcal{C}$. Montrer que $M$, $M' = r(M)$ et $B$ sont alignés.

## Exercice 5 (4 points)

Soit $\mathbb{R}^2$ le plan affine euclidien muni du produit scalaire standard et de la base canonique.

**1** Ecrire la matrice $A$ de la forme bilinéaire symétrique donnée en coordonnées par

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) = xx' + 19yy' + 12xy' + 12x'y.$$

**2** Diagonaliser $A$ dans une base orthonormée.

**3** Déterminer la nature de la conique d'équation

$$x^2 + 19y^2 + 24xy + 5y = 0.$$

*Le corrigé sera disponible sur internet.*