UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique 3

Feuille en grève : Groupe symétrique.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On appelle *groupe symétrique* d'ordre n l'ensemble des bijections de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même (les *permutations* de $\{1, \ldots, n\}$). On munit cet ensemble, noté $\mathfrak{S}_n$ et prononcé "Sn", de la loi de composition interne définie par la composition des applications. On note usuellement $\cdot$ au lieu de $\circ$ la loi de composition sur $\mathfrak{S}_n$, et on parle du produit plutôt que de la composée de deux permutations (on peut même omettre le symbole $\cdot$).

1 Pourquoi cette loi est-elle bien une loi de composition interne ?

2 Montrer que $(\mathfrak{S}_n, \cdot)$ est un groupe.

3 Quel est le cardinal de $\mathfrak{S}_n$?

Notation : Un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se note généralement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Par exemple, l'élément de $\mathfrak{S}_3$ qui envoie 1 sur 1, 2 sur 3 et 3 sur 2 est noté :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

4 Donner la liste de tous les éléments de $\mathfrak{S}_3$.

Pour tous $x_1, \cdots, x_k$ distincts de $\{1, \cdots, n\}$, on définit un *cycle* de longueur k, ou k-cycle, noté $(x_1\ x_2\ \cdots\ x_k)$. C'est l'élément σ de $\mathfrak{S}_n$ vérifiant $\sigma(x_i) = x_{i+1}$ pour $1 \leq i < k$, et $\sigma(x_k) = x_1$, et laissant fixes tous les éléments de $\{1, \cdots, n\} \setminus \{x_1, \cdots, x_k\}$. Par exemple, le cycle dans $\mathfrak{S}_5$ noté $(1\ 3\ 4)$ est la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

L'ensemble des points qui ne sont pas fixés par le cycle σ s'appelle le *support* du cycle. Un cycle de longueur 2 est appelé *transposition*.

5 Les cycles suivants sont des éléments de $\mathfrak{S}_7$. Écrivez la permutation qu'ils décrivent : $(2\ 5\ 3\ 6\ 4)$, $(1\ 7)$, $(3\ 4\ 7\ 5)$.

6 On considère $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculez $\sigma \cdot \tau$ et $\tau \cdot \sigma$. Le groupe $\mathfrak{S}_4$ est-il abélien ?

7 Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Montrez que σ est un 5-cycle, et donnez la notation correspondante. Déterminez l'ordre de σ.

8 Soit σ l'élément de $\mathfrak{S}_6$ s'écrivant comme le produit de cycles suivant : $\sigma = (1\ 2) \cdot (3\ 5\ 6)$. Donnez l'écriture usuelle de la permutation σ.

9 On considère les éléments suivants de $\mathfrak{S}_6$:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour chacun d'entre eux, calculer son ordre, et calculer tous les produits $\sigma_i \sigma_j$ pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

10 Montrer que si σ et τ sont deux cycles *à supports disjoints*, alors $\sigma\tau = \tau\sigma$.