Algèbre et Arithmétique 3

Feuille n°2 : Groupes et sous-groupes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

1 Exercices à savoir faire

Questions de cours

1 Soit p un nombre premier, et soit $(G, \star)$ un groupe d'ordre p. Montrer que G est cyclique.
2 Ecrire les tables d'opération dans l'anneau $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$.
3 Démontrer que le noyau d'un morphisme d'anneaux commutatifs est un idéal.

Exercice 1

1 Montrer que $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ peut être muni d'une structure naturelle d'anneau.
2 Montrer que $\mathbf{R}[X]$ est un anneau, et que pour tout $a \in \mathbf{R}$, l'ensemble
$I_a = \{P \in \mathbf{R}[X] \ / \ P(a) = 0\}$ est un idéal de $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 2

1 Montrer que $\{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}, +)$.
2 Expliciter un sous-groupe d'ordre 6 de $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}, +)$.
3 Quels sont les ordres possibles des sous-groupes de $(\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}, +)$?
4 Soient n un entier naturel non nul. Le but de cette question est de déterminer tous les sous-groupes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Soit d un diviseur de n.

a) Expliciter un sous-groupe G_d de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ d'ordre d.

b) Soit H un sous-groupe de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ d'ordre d. Montrer que pour tout $\overline{x} \in H$, $d \cdot \overline{x} = 0$. Combien d'éléments de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ vérifient cette équation ? En déduire que $H = G_d$.

c) Conclure.

5 Donner la liste de tous les sous-groupes de $(\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}, +)$.

Exercice 3

Déterminer l'ordre de $\overline{2}$ dans $(\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}, +)$.

Exercice 4

1 Montrer que l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
2 L'équation $x^3 + x + 1 = 0$ a-t-elle des solutions dans $\mathbf{Z}$?

Exercice 5

Soit $N \in \mathbf{Z}$, on écrit N en base 10 : $N = a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^k a_k$.
1 Quel est le chiffre des unités de N ?
2 Montrer que $N \equiv a_0 + \cdots + a_k$ [3]. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les chiffres de N pour que N soit divisible par 3.
3 En utilisant une méthode similaire, donner un critère de divisibilité par 11.

2 Exercices à chercher

Exercice 6

1 Quelle opération fait de $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ un groupe ?
2 Ce groupe est-il fini ?
3 Quel est l'ordre de $7/12$ dans ce groupe ?
4 Montrer que tous les éléments de $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ sont d'ordre fini.