UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique 3

Examen (26 Mai 2009)

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses. Il est bon de relire sa copie...

Durée : 2 heures

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (QUESTIONS DE COURS, 5 points)

1. Le sous-ensemble $28\mathbf{Z} + 18\mathbf{Z}$ de $\mathbf{Z}$ est-il un sous-groupe de $\mathbf{Z}$? Si oui, le déterminer.
2. Le sous-ensemble $28\mathbf{Z} \cup 18\mathbf{Z}$ de $\mathbf{Z}$ est-il un sous-groupe de $\mathbf{Z}$? Si oui, le déterminer.
3. Le sous-ensemble $28\mathbf{Z} \cap 18\mathbf{Z}$ de $\mathbf{Z}$ est-il un sous-groupe de $\mathbf{Z}$? Si oui, le déterminer.
4. Donner l'exemple d'un groupe commutatif non cyclique.
5. Donner l'exemple d'un groupe non commutatif infini.
6. Donner la définition d'un anneau.
7. Démontrer que tout groupe fini d'ordre premier est cyclique.

Exercice 2 (5 points)

1. Quels sont les ordres possibles des éléments d'un groupe d'ordre 6 ?
2. Quels sont les éléments inversibles de $(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}, \times)$?
3. Ecrire la table de multiplication de $((\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})^\star, \times)$.
4. Déterminer s'il en existe un générateur de $((\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})^\star, \times)$.
5. Combien $((\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})^\star, \times)$ a-t-il de générateurs ?
6. Le groupe $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ est-il cyclique ?
7. Le groupe des inversibles de $\mathbf{Z}/20\mathbf{Z}$ est-il cyclique ?

Tourner S.V.P.

Exercice 3 (5 points)

Dans le groupe $\mathfrak{S}_7$ des permutations de l'ensemble fini $\{1, 2, \cdots, 7\}$ on considère les deux permutations

$$\alpha = (157)(43) \text{ et } \beta = (26)$$

1. Montrer que $\alpha\beta = \beta\alpha$.
2. Déterminer l'ordre de α et de β.
3. Calculer α^{-1} et β^{-1}.
4. Montrer que $S = \{\alpha^i \beta^j, 0 \leq i \leq 5, 0 \leq j \leq 1\}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_7$.
5. Calculer l'ordre de S.
6. Montrer que tout sous-groupe de $\mathfrak{S}_7$ qui contient α et β contient S.
7. Que peut-on déduire des questions 4. et 6. précédentes ?
8. Déterminer l'ordre de $\alpha\beta$.
9. Le sous-groupe S est-il cyclique ?

Exercice 4 (2.5 points)

1. Calculer les produits de matrices ADA^{-1} et BDB^{-1} dans $GL(2, \mathbf{R})$ où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Le sous-groupe de $GL(2, \mathbf{R})$ des matrices diagonales inversibles est-il distingué dans $GL(2, \mathbf{R})$?
3. Calculer le produit de matrices AB dans $GL(2, \mathbf{R})$.
4. L'application trace de $GL(2, \mathbf{R})$ dans $(\mathbf{R}, +)$ est-elle un morphisme de groupes ?

Exercice 5 (2.5 points)

1. Ecrire une relation de Bezout entre $X^2 + X + 1$ et $X^3 + X + 1$ dans $\mathbf{R}[X]$.
2. La classe du polynôme $X^2 + X + 1$ est-elle inversible dans l'anneau quotient $\mathbf{R}[X]/(X^3 + X + 1)$?
3. Si oui, donner son inverse.

Le corrigé sera disponible sur internet.