Algèbre et Arithmétique 3

Feuille n^o 6 : Groupes de permutations

1 Exercices à savoir faire

Exercice 1

Vérifier que si A est un ensemble à n éléments, le groupe $(\mathfrak{S}(A), \circ)$ des permutations des éléments de A est isomorphe à $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 2

1 Décomposer en produit de cycles à support disjoints la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

2 La décomposer en produit de moins de 7 tranpositions.
3 La décomposer en produit de transpositions de la forme $(1, i)$.
4 Déterminer son ordre.
5 Déterminer sa signature.
6 Peut-on écrire σ comme produit de onze transpositions ?
7 Ecrire son inverse en produit de cycles à support disjoints.

Exercice 3

1 Dans $\mathfrak{S}_3$, calculer $(1, 3)(1, 2)(1, 3)^{-1}$.
2 Le sous-groupe de $\mathfrak{S}_3$ engendré par la transposition $(1, 2)$ est-il distingué ?
3 Le sous-groupe engendré par un cycle de longueur 3 est-il distingué ?

Exercice 4

1 Soit $\gamma \in \mathfrak{S}_n$ le k-cycle $\gamma = (i_1, \ldots, i_k)$. Quel est le conjugué de γ par un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$?
2 Soit $\rho \in \mathfrak{S}_n$ et $\gamma_1 \ldots \gamma_r$ la décomposition en produit de cycles à supports disjoints de ρ. Calculer le conjugué de ρ par un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
3 Calculer $\sigma\rho\sigma^{-1}$ avec

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

Calculer

$$(1, 2)(2, 3) \cdots (i - 2, i - 1)(i - 1, i)(i - 2, i - 1) \cdots (2, 3)(1, 2).$$

On pourra reconnaitre une conjugaison.

Exercice 6

Ecrire $(1,4)(2,3)$ comme produit de 3-cycles.

Exercice 7

1 Calculer l'ordre de $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{A}_4$.
2 Déterminer les profils possibles d'éléments de $\mathfrak{S}_4$ et de $\mathfrak{A}_4$.
3 Pour chaque profil, dénombrer les permutations de ce profil.

Exercice 8

1 Si c est le cycle $(1,2,3,4,5,6)$, c^2 est-il un cycle ?
2 Si c est un cycle de $\mathfrak{S}_n$ d'ordre l et k un entier naturel, calculer l'ordre de c^k.

2 Exercices à chercher

Exercice 9

1 $\mathfrak{A}_4$ a-t-il des éléments d'ordre 12 ?
2 $\mathfrak{A}_4$ a-t-il des éléments d'ordre 6 ?
3 Déterminer un sous-groupe d'ordre 3 de $\mathfrak{A}_4$. Est-il distingué ?
4 Vérifier que

$$V_4 = \{Id,\ (12)(34),\ (13)(42),\ (14)(23)\}.$$

est un sous-groupe de $\mathfrak{A}_4$.
5 Est-il isomorphe à $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ ou bien à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$?
6 V_4 est-il distingué ?