A02. NOMBRES ENTIERS ET RATIONNELS, CONGRUENCES. PERMUTATIONS

Feuille de travaux dirigés n° 3 : *Division euclidienne*

Exercices à savoir faire

EXERCICE 1

Donner si possible un exemple de deux entiers n et m dont le produit nm est divisible par 5 sans que ni n ni m ne le soit.
Donner si possible un exemple de deux entiers n et m dont le produit est divisible par 15 sans que ni n ni m ne le soit.

EXERCICE 2

Si n est un entier, on note $\mathcal{D}_n = \{p \in \mathbf{N} \mid p \text{ divise } n \text{ et } p \text{ premier}\}$.
Soient $n, m \in \mathbf{N}$ tels que $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_m$: a-t-on $n = m$?

EXERCICE 3

Montrer que pour tout entier naturel n le nombre $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 24.

EXERCICE 4

Dans une certaine base, un entier s'écrit $\overline{1254}$ et son double $\overline{2541}$. Quel est cet entier et quelle est la base ?

EXERCICE 5

1 Écrire en base 7, puis en base 2, enfin dans la base hexadécimale le nombre mille sept-cent quatre-vingt-neuf.
2 Que vaut le nombre écrit $\overline{101001001}$ en base 2 ?
3 Que vaut le nombre écrit $\overline{BAC}$ en hexadécimal ?

EXERCICE 6

Soit n un entier dont l'écriture décimale est $\overline{abc}$. Montrer que $n \equiv 2a + 3b + c \pmod 7$.

EXERCICE 7

1 Trouver des entiers relatifs u et v tels que $29u + 24v = 1$.
2 Déterminer l'ensemble des couples $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $29u + 24v = 3$.

EXERCICE 8

1 Soit m et n des entiers relatifs tels que m divise à la fois $8n + 7$ et $6n + 5$. Montrer que $m = \pm 1$.
2 Soit a un entier relatif. Déterminer le pgcd d des entiers $m = 14a + 3$ et $n = 21a + 4$ et trouver des entiers u et v tels que $um + vn = d$.

Exercices à chercher

EXERCICE 9

Si $(a,b)=(30,21)$, calculer $d=\text{pgcd}(a,b)$, $\text{ppcm}(a,b)$ et déterminer un couple d'entiers (u,v) tels que $au+bv=d$.

EXERCICE 10

Quel est le plus petit entier (strictement positif) qui est multiple de 1, 2, 3,..., 10 ?

EXERCICE 11

Si n est un entier, on note $D_n=\{k\in\mathbf{N}\mid k \text{ divise } n\}$.
Soient $n,m\in\mathbf{N}$ tels que $D_n=D_m$: a-t-on $n=m$?

EXERCICE 12

Montrer que si $n+m$ est pair, il en est de même pour $n-m$.
Résoudre dans $\mathbf{Z}^2$ l'équation $n^2-m^2=30$.

EXERCICE 13

Enoncer et démontrer le critère de divisibilité par 9.
Donner une condition nécessaire est suffisante pour qu'un entier soit divisible par 45.
En déduire un critère de divisibilité par 45.
Les nombres suivants sont-ils divisibles par 9 : 3546733, 25413985, 2472480 ?

EXERCICE 14

1 Quel sont les entiers qui s'écrivent avec exactement m chiffres en base b ? Combien y en a-t-il ?

2 Si on ajoute deux nombres ayant au plus n chiffres en base b, combien de chiffres (au plus) aura leur somme ? leur produit ?

EXERCICE 15

Remarquer que $10\equiv -1 \pmod{11}$. En déduire un procédé simple du calcul du reste de la division euclidienne par 11 d'un entier écrit sous forme décimale.

EXERCICE 16

Soit $N=\overline{mcdu}$ un nombre de quatre chiffres écrit en base 10. On pose $P=\overline{udcm}$. Montrer que $N+P$ est divisible par 11 et donner le quotient de la division de $N+P$ par 11.

EXERCICE 17

Quels sont les trois derniers chiffres de $7^{100}-3^{100}$? (*Écrire* $7=10-3$ *et utiliser la formule du binôme.*)

EXERCICE 18

Montrer que $k(k+1)\dots(k+n-1)$ est divisible par $n!$.

EXERCICE 19

Soit n un entier. Calculer le reste de la division euclidienne de n^2 par 4, suivant que cet entier est pair ou impair. Existe-t-il des entiers a et b tels que $a^2 + b^2 = 8123$?

EXERCICE 20

1 Déterminer la parité des solutions entières de l'équation $x^3 + 6x^2 - 3x - 9 = 0$

2 Ces solutions sont-elles divisibles par 3 ?

Exercices pour aller plus loin

EXERCICE 21

Soit A l'entier 4444^{4444} ; soit B la somme de ses chiffres, C la somme des chiffres de B et D la somme des chiffres de C. Que vaut D ?

EXERCICE 22

Que pourrait être la « preuve par $b-1$ » en base b ?

EXERCICE 23

Vous disposez d'un stock illimité de billets de banque de valeur « p euros » et de valeur « q euros », où p et q sont deux entiers naturels premiers entre eux. Montrer qu'à partir d'une certaine somme, vous pouvez payer tous les montants.

EXERCICE 24

1 Soit a, b, c des entiers. On suppose que a divise bc et que $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1$. Montrer que a divise c. (*Multiplier par* c *une relation de Bézout* $1 = au + bv$.)

2 Soit a, b, c, d des entiers naturels non nuls. On suppose que $\mathrm{pgcd}(a,b) = \mathrm{pgcd}(c,d) = 1$ et que $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$ est entier. Montrer que $b = d$.

EXERCICE 25

On définit la suite de Fibonacci par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

1 Montrer (par récurrence) que $F_{n+1}F_{n-1} - (F_n)^2 = (-1)^n$ pour tout n.

2 Montrer que $F_{n+m} = F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}$. (Faire une récurrence sur m, puis sur n.)

3 Montrer que l'on a, pour $m < n$, $\mathrm{pgcd}(F_n, F_m) = \mathrm{pgcd}(F_{n-m}, F_m)$ et $\mathrm{pgcd}(n,m) = \mathrm{pgcd}(n-m, m)$. En déduire par récurrence sur $\max(m,n)$ que la relation $\mathrm{pgcd}(F_n, F_m) = F_{\mathrm{pgcd}(n,m)}$.

4* Calculer F_n pour tout entier n. Quelle est la limite de F_{n+1}/F_n quand n tend vers l'infini ? Montrer que F_n est l'entier le plus proche de $((1+\sqrt{5})/2)^n/\sqrt{5}$.

EXERCICE 26

Soit x, y, z des entiers >0, premiers entre eux dans leur ensemble, tels que $x^2+y^2=z^2$ (*triplet pythagoricien*).

1 Soit $d=\text{pgcd}(x,y)$. Montrer que d divise z. En déduire que x, y, z sont premiers entre eux deux à deux.

2 Montrer que de x et y, l'un des deux est pair et l'autre est impair. On supposera dans la suite que x est pair.

3 Montrer que $\text{pgcd}(z-y,z+y)=2$. En utilisant que $x^2=z^2-y^2=(z-y)(z+y)$, montrer qu'il existe des entiers u et v tels que $x=2uv$, $z+y=2u^2$ et $z-y=2v^2$.

4 Inversement, si u et v sont premiers entre eux, le triplet $(x,y,z)=(2uv,u^2-v^2,u^2+v^2)$ est un triplet pythagoricien.

Pour ne pas oublier

Contrôles 1

1 Enoncer les axiomes de Peano.

2 *Bonus : Quels axiomes de Peano l'ensemble* $\{0,1,2,3\}$ *ne vérifie-t-il pas ?*

3 Montrer par récurrence sur n que pour tout entier n, 5^n+3 est multiple de 4.

4 Montrer par récurrence sur n que pour tout entier $n\geqslant 5$, $\qquad 2^n\geqslant n^2$.

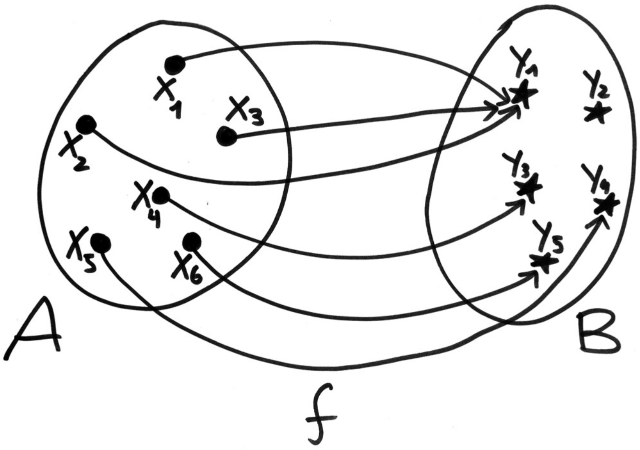
Contrôles 2

1 À l'aide de « patates », donnez :

- un exemple de fonction non-injective ;
- un exemple de fonction surjective ;
- un exemple de fonction bijective.

2 Montrer par récurrence sur n que pour tout entier $n\geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} k\times k! = (n+1)!-1$.

3 Soit f l'application définie par :



f est-elle injective ? f est-elle surjective ? *(Justifiez vos réponses)*
Déterminez $f^{<-1>}(\{Y_1,Y_3\})$ et $f(\{X_1,X_2,X_4\})$.

4 Montrer par récurrence sur n que pour tout entier $n\geqslant 1$: $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$