UNIVERSITÉ DE RENNES 1

A02. NOMBRES ENTIERS ET RATIONNELS, CONGRUENCES. PERMUTATIONS

Feuille de travaux dirigés n° 2

Théorie des ensembles, Combinatoire

Exercices à savoir faire

EXERCICE 1

1 Soit A un sous ensemble de $\mathbb{N}$ dont tous les éléments sont plus grands que 100. Que peut-on dire du plus grand élément du complémentaire de A ?

2 Donner (si possible) l'exemple de deux sous-ensembles A et B de $\mathbb{N}$ tels que le plus petit élément de $A \cap B$ ne soit ni le plus petit élément de A, ni le plus petit élément de B.

3 Donner (si possible) l'exemple de deux sous-ensembles A et B de $\mathbb{N}$ tels que le plus petit élément de $A \cup B$ ne soit ni le plus petit élément de A, ni le plus petit élément de B.

EXERCICE 2

1 Dessiner si possible (avec des patates) le graphe d'une application surjective f et d'une application g dont la composée $f \circ g$ ne soit pas surjective.

2 Dessiner si possible (avec des patates) le graphe d'une application surjective f et d'une application g dont la composée $g \circ f$ ne soit pas surjective.

3 Dessiner si possible (avec des patates) le graphe d'une application surjective f et d'une application g surjective dont la composée $g \circ f$ ne soit pas surjective.

4 Reprendre les questions précédentes avec "injective" au lieu de "surjective".

EXERCICE 3

1 Au mois de janvier, Anatole a pris ses repas de midi au Restau U. Il y a mangé 17 fois de la pizza et 25 fois de la glace. Montrer qu'il a mangé de la pizza et de la glace au cours d'un des repas.

2 Dans une classe de 35 élèves, chaque étudiant doit apprendre au moins une des deux langues, anglais ou allemand. 25 étudient l'anglais et 20 apprennent les deux langues. Combien d'élèves étudient l'allemand ?

3 Hier soir, sur 100 français, 95 ont regardé le journal télévisé, 85 ont regardé le film qui suivait et 70 se sont couché de bonne heure. Combien de français (au moins) se sont couchés tôt après avoir regardé le journal et le film ?

EXERCICE 4

1 Dessiner (si possible) deux ensembles A et B avec cinq éléments chacun et dont la réunion a neuf éléments.

2 Dessiner (si possible) trois ensembles A, B et C avec cinq éléments chacun et dont la réunion a neuf éléments et l'intersection $A \cap B \cap C$ aucun.

EXERCICE 5

Ecrire le triangle de Pascal jusqu'à sa dixième ligne.

Exercices à chercher

EXERCICE 6

Soit n un entier naturel non nul.

1 On considère deux ensembles A et B et une application $f : A \to B$. On sait que A est un ensemble fini et que chaque élément de B a exactement n antécédents. Déterminer le cardinal de A.

2 On considère deux ensembles A et B et une application $f : A \to B$. On sait que A est un ensemble fini et que chaque élément de B a exactement n antécédents sauf l'élément β qui n'a que deux antécédents. Déterminer le cardinal de A.

3 Donner l'exemple d'une application $f : A \to B$ où B est un ensemble fini sans que A le soit.

EXERCICE 7

1 Déterminer le nombre $p(n)$ de parties d'un ensemble à n éléments.

2 Le nombre de parties du produit cartésien $A \times B$ d'un ensemble A à 5 éléments avec un ensemble B à 4 éléments est-il le produit $p(5) \times p(6)$? (Si non que représente le nombre $p(5) \times p(6)$?)

EXERCICE 8

On considère n objets de différentes couleurs. Si a est un entier tel que $a \leqslant \sqrt{n-1}$, montrer que l'on peut trouver ou bien $a+1$ objets de la même couleur, ou bien $a+1$ objets de couleurs toutes différentes.

EXERCICE 9

Dans un groupe de 6 personnes, deux personnes quelconques ou bien s'aiment, ou bien se détestent. Montrer que l'on peut en trouver 3 qui sont amis, ou 3 qui sont mutuellement ennemis. (*Fixer une personne Anatole ; parmi ses 5 relations, Anatole a (au moins) 3 amis, ou 3 ennemis. Si Anatole a trois amis et que deux d'entre eux sont amis, le résultat est obtenu. Sinon...*)

EXERCICE 10

1 Soit X et Y deux ensembles finis. Combien y a-t-il d'applications injectives de X dans Y ? (La même question avec « surjectives » est naturelle, mais plus difficile.)

2 Estimer le nombre d'applications injectives de $\{1, \ldots, 30\}$ dans $\{1, \ldots, 365\}$. Sur une classe de 30 élèves, quelle est la probabilité que deux élèves soient nés le même jour ? (*Paradoxe des anniversaires*)

EXERCICE 11

1 Démontrer la relation $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_{n-1}^{p-1} + \mathrm{C}_{n-1}^p$ pour $n > p \geqslant 1$ en utilisant la formule qui calcule C_n^p à l'aide de factorielles.

2 Inversement, à l'aide de cette identité, démontrer par récurrence la formule qui calcule C_n^p.

EXERCICE 12

1 Démontrer de deux façons la formule $\mathrm{C}_n^p = \dfrac{n}{p}\mathrm{C}_{n-1}^{p-1}$ pour $n \geqslant p \geqslant 1$.

2 Démontrer de deux façons que $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_n^{n-p}$.

EXERCICE 13

1 À l'aide de la formule du binôme, démontrer que

$$\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^n = 2^n.$$

2 Calculer de même $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\mathrm{C}_n^p$.

3 Calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p\mathrm{C}_n^p$ et $\displaystyle\sum_{p=2}^{n} p(p-1)\mathrm{C}_n^p$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^2\mathrm{C}_n^p$.

4 Retrouver la question précédente en dérivant (une puis deux fois) la formule du binôme pour $(1+x)^n$.

EXERCICE 14

1 En développant $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$, montrer que $\mathrm{C}_{2n}^n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\left(\mathrm{C}_n^p\right)^2$. (Remarquer que $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_n^{n-p}$.)

2 Donner une interprétation combinatoire de la formule précédente.

Exercices pour aller plus loin

EXERCICE 15

1 Dans les situations simples où tous les cas sont équiprobables, on définit la probabilité d'un évènement comme le nombre de cas favorables divisé par le nombre de cas possibles. La probabilité d'"avoir un 3 ou un 5" pour un lancer de dés est donc 2/6. (Pour plus d'informations, lire le cours).
Quelle est la probabilité d'avoir deux dés identiques en lançant deux dés ? en lançant trois dés ?

2 Au Yam, votre deuxième lancer vous fournit 2, 3, 3, 4, 5. Que vaut-il mieux faire : lancer 2, 4, 5 pour un brelan de 3 ou le 3 pour une des deux suites ?

EXERCICE 16

On lance deux dés. Quel est le nombre le plus probable pour la somme obtenue ? On pourra utiliser un échiquier 6×6 dont les lignes et les colonnes sont numérotées de 1 à 6 pour modéliser l'espace des résultats.

EXERCICE 17

Le principe d'inclusion-exclusion donne lieu à des inégalités : si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties d'un ensemble X, montrer par exemple que

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i\neq j} |A_i \cap A_j| \leqslant \left|\bigcup_i A_i\right| \leqslant \sum_i |A_i|\,.$$

Généraliser.

EXERCICE 18

Soit $D_{n,k}$ le nombre de permutations de $\{1, \ldots, n\}$ qui ont exactement k points fixes (*dérangements*).

1 Montrer que $D_{n,0} + \cdots + D_{n,n} = n!$.

2 Montrer que $D_{n,k} = \mathrm{C}_n^k D_{n-k,0}$

3 En déduire que

$$\frac{1}{n!} D_{n,0} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

EXERCICE 19

On définit la relation suivante sur l'ensemble des nombres entiers naturels. $n \sim m$ si la somme des chiffres de n dans l'écriture décimale est égale à celle de m.

Est-ce une relation réflexive ? symétrique ? anti-symétrique ? transitive ?

EXERCICE 20

On définit la relation suivante sur l'ensemble des nombres entiers naturels. $n\{m$ si la somme des chiffres de n dans l'écriture décimale est inférieure à celle de m.

1 Comparer 56, 89, 1211 et 4322.

2 Est-ce une relation réflexive ? symétrique ? anti-symétrique ? transitive ?