

A02. NOMBRES ENTIERS ET RATIONNELS,
 CONGRUENCES.
 PERMUTATIONS



Feuille de travaux dirigés n° 1

Nombres entiers et principe de récurrence
Exercices à savoir faire**EXERCICE 1**

- 1 La proposition "arriver à la gare avant 10h" est-elle une condition nécessaire (suffisante, nécessaire et suffisante) pour "attraper le train de 9h30" ?
- 2 Donner une condition suffisante mais pas nécessaire pour qu'un nombre entier soit strictement plus grand que 10.
- 3 Donner une condition nécessaire mais pas suffisante pour qu'un nombre entier soit divisible par 6.

EXERCICE 2

- 1 Montrer que pour tout entier $n \geq 4$, on a $2^n < n!$.
- 2 Déterminer un entier A tel que pour tout $n \geq A$, on ait $3^n < n!$.

EXERCICE 3

- 1 Montrer que pour tout entier n , $4^n + 5$ est un multiple de 3.
- 2 Montrer que si $10^n + 7$ est multiple de 9, $10^{n+1} + 7$ l'est aussi. Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 4

On considère une suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison a et on pose $U_n = u_0 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Montrer que $U_n = (n+1)(u_0 + \frac{1}{2}an)$.

EXERCICE 5

On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison a et on pose encore $U_n = u_0 + \dots + u_n$. On suppose que $a \neq 1$; montrer alors que $U_n = u_0 \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$. Que vaut U_n dans le cas où $a = 1$?

EXERCICE 6

Les taux d'intérêt (TEG annuel) des crédits à la consommation sont en 2005 de l'ordre de 8% pour des prêts d'une durée de 5 ans. Vous souhaitez acheter une Logan (7500 euros); votre revenu mensuel est de 1200 euros et l'organisme de prêt exige un endettement inférieur à 30%.

- 1 Quel est le nombre minimal de mensualités dont vous devrez vous acquitter ?
- 2 Quel est le coût total de votre crédit si vous souscrivez un tel crédit ? et si vous décidez de rembourser pendant 5 ans ?

EXERCICE 7

Soit (u_n) la suite définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = 3u_n + 2$ et $u_0 = 1$.

- 1 Déterminer un nombre réel a tel que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + a$ soit une suite géométrique.
- 2 En déduire une formule simple pour v_n puis une formule simple pour u_n .
- 3 Déduire de l'exercice une *méthode générale* pour calculer le n -ième terme d'une suite (u_n) définie par une récurrence $u_{n+1} = au_n + b$, où a et b sont des nombres réels.

Exercices à chercher

EXERCICE 8

Un ingénieur au revenu mensuel de 3 000 euros décide d'acheter une maison ; le taux d'endettement que lui autorise son organisme de crédit est $1/3$, le taux d'intérêt du moment est 3,5%.

- 1 De quelle somme peut-il disposer s'il décide de souscrire un prêt d'une durée de 10 ans ? de 20 ans ?
- 2 Quel est le coût total du crédit (pour 100 000 euros empruntés) ?
- 3 En 1995, les taux d'intérêts étaient plutôt de l'ordre de 8,5%. Répondre aux questions ci-dessus.

EXERCICE 9

On dispose d'un stock illimité de pièces de 3 euros et de 5 euros. Quels sont les montants que l'on peut payer ?

EXERCICE 10

- 1 Montrer par récurrence sur n les formules

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- 2 Que vaut, si n est impair, la somme $1 + 3 + 5 + \dots + n$?
- 3 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

EXERCICE 11

- 1 Déterminer deux nombres réels a et b tels que l'on ait, pour tout nombre réel $x > 0$,

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

- 2 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

EXERCICE 12

Soit (u_n) la suite définie par récurrence par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ pour $n \geq 0$.

- 1 Démontrer que pour tout entier n , on a $u_n \geq n^2$.
- 2 On définit une suite (v_n) en posant, pour tout entier n , $v_n = u_{n+1} - u_n$. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n , puis exprimer v_n en fonction de n .
- 3 Calculer u_n en fonction de n .

EXERCICE 13

Nous allons démontrer par récurrence sur n que si, dans une salle de n personnes, il y a au moins une fille, alors il n'y a que des filles. Notons $P(n)$ cette proposition.

Elle est vraie pour $n = 1$.

Supposons qu'elle soit vraie pour n , c'est-à-dire supposons que lorsqu'une salle contient n personnes dont au moins une fille, alors il n'y a que des filles ; montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$. Considérons donc une salle contenant $n + 1$ personnes dont au moins une fille ; appelons-la Chantal. Faisons sortir une personne autre que Chantal, disons, Vincent. La salle contient n personnes, dont une fille, Chantal. Par l'hypothèse de récurrence, il y a donc n filles dans la salle. On fait alors entrer Vincent, et on demande à Chantal de sortir. Dans la salle il y a n personnes dont $n - 1$ filles. En appliquant à nouveau l'hypothèse de récurrence, on en déduit que la salle ne contient que des filles. On fait alors rentrer Chantal ; la salle ne contient que des filles.

Chercher l'erreur !

EXERCICE 14

Un récipient contient 1 dm^3 de riz, chaque grain faisant 1 mm^3 . On dispose un grain de riz sur la première case d'un échiquier, deux sur la deuxième, quatre sur la suivante, et ainsi de suite, en doublant à chaque fois le nombre de grains. Combien de cases de l'échiquier seront remplies lorsque le pot de riz ne contiendra plus assez de grains ? Combien en reste-t-il dans le pot ?

EXERCICE 15

La suite (u_n) est définie par $u_1 = 1/2$ et $u_n = u_{n-1}/(2nu_{n-1} + 1)$, si $n \geq 2$. Calculer $u_1 + \dots + u_n$ pour tout entier n . (Commencez par calculer explicitement cette somme pour de petites valeurs de n , conjecturez alors une formule générale que vous démontrerez ensuite par récurrence.)

EXERCICE 16

On définit une suite (u_n) en posant $u_0 = 1$ et, si $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n/(1 + u_n)$.

- 1 Montrer que l'on a $u_n > 0$ pour tout entier n .
- 2 Montrer que la suite $(1/u_n)$ est arithmétique.
- 3 Calculer u_n pour tout entier n .

EXERCICE 17

1 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

. Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.

2 On note \mathcal{P}_n la propriété " $u_n = 1 + 2^n$ ". Montrer en adaptant le raisonnement par récurrence que pour tout n entier, la propriété \mathcal{P}_n est vraie.

EXERCICE 18

1 Soit $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ une famille de $n \times m$ nombres réels. Montrer par récurrence sur n :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}.$$

2 En déduire, si $(b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq i}}$ est une autre famille de nombres réels :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i b_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n b_{ij}.$$

Indication : pour appliquer le résultat précédent, on pourra compléter la famille par des zéros.

3 Calculer

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{1}{n-j+1}.$$

Exercices pour aller plus loin**EXERCICE 19**

Soit (x_n) une suite de réels dans $]0, 1[$. On pose $S_n = x_1 + \dots + x_n$. Montrer l'inégalité

$$1 - S_n \leq (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n) \leq \frac{1}{1 + S_n}.$$

EXERCICE 20

Si n est un entier ≥ 1 et x un réel dans $[0, 1]$, montrer l'inégalité

$$1 - nx \leq (1 - x)^n \leq 1 - \frac{nx}{1 + (n-1)x}.$$

EXERCICE 21

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $\prod_{k=1}^n (4k - 2) = \prod_{k=1}^n (n + k)$.

EXERCICE 22

- 1 Si x et y sont deux nombres réels positifs, montrer que $\sqrt{xy} \leq (x + y)/2$.
- 2 Montrer par récurrence sur n que si x_1, \dots, x_{2^n} sont des nombres réels positifs,

$$(x_1 \dots x_{2^n})^{1/2^n} \leq (x_1 + \dots + x_{2^n})/2^n.$$

- 3 Soit $N \geq 2$ et soit x_1, \dots, x_N des nombres réels positifs. Démontrer que

$$(x_1 \dots x_N)^{1/N} \leq (x_1 + \dots + x_N)/N$$

(*inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique*). Pour cela, choisir un entier n tel que $N \leq 2^n$; poser, pour $N \leq k \leq 2^n$, $x_k = (x_1 + \dots + x_N)/N$; appliquer la question précédente.

EXERCICE 23

- 1 Peut-on paver un échiquier privé de deux cases diagonalement opposées par des dominos (chacun recouvrant exactement deux cases).
- 2 Démontrer que l'on peut paver un échiquier 8×8 par des triominos en forme de L (recouvrant trois cases) de sorte à laisser vide une case quelconque prescrite à l'avance. (Remplacer 8 par 2^n , et faire une récurrence. . .)
- 3 Quels rectangles sont pavables par des triominos en forme de L? (La réponse générale n'est-elle pas connue. . .)

EXERCICE 24

Démontrer la commutativité de la multiplication dans l'ensemble des nombres entiers naturels, à l'aide des formules de définition de cette multiplication.