UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Partiel M2 : Surfaces de Riemann

Les notes de cours et de TD sont autorisées. Les autres documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables. Il est conseillé d'étudier les questions dans l'ordre.

1. Préliminaires

Dans tout l'exercice, X désignera une surface de Riemann connexe compacte de genre g et x_0 un point de X.

1) Déterminer explicitement une fonction méromorphe sur la droite projective $\mathbb{P}^1$ (muni d'un repère projectif), holomorphe sur $\mathbb{P}^1 - \{[0:1],[1:0]\}$ et avec exactement un pôle d'ordre 1 en $[0:1]$ et un pôle d'ordre 1 en $[1:0]$.

2) Soit a un point de la droite projective $\mathbb{P}^1$. Existe-t-il une 1-forme méromorphe non nulle sur $\mathbb{P}^1$ holomorphe sur $\mathbb{P}^1 - \{a\}$ avec un pôle d'ordre inférieur à 1 en a ? et avec un pôle d'ordre inférieur à 2 ? et avec un pôle d'ordre inférieur à 3 ?

3) Soit a, b, c, d des nombres complexes. Sous quelle condition l'application $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, $[X : Y] \mapsto [aX + bY : cX + dY]$ est-elle bien définie ? Sous quelle condition est-elle un biholomorphisme ?

4) Montrer qu'il existe une fonction méromorphe non constante holomorphe sur $X - \{x_0\}$ et avec un pôle d'ordre inférieur à $g + 1$ en x_0.

5) Soit un revêtement ramifié $\pi : X \to \mathbb{P}^1$. Montrer que les diviseurs $\pi^{-1}([0 : 1])$ et $\pi^{-1}([1 : 0])$ (comptés avec multiplicités) sont linéairement équivalents.

2. Sections holomorphes de fibrés en droites complexes

Dans tout l'exercice, X désignera une surface de Riemann connexe compacte de genre g au moins égal à 1.

1) Soit x_0 un point de X et L_{x_0} le fibré en droites associé au diviseur x_0. Calculer $h^0(X, L_{x_0})$.

2) En déduire $h^0(X, \Omega^1_X \otimes L_{-x_0})$.

3) Soit x_0 et x_1 deux points (éventuellement égaux) de X. Comparer $h^0(X, \Omega^1_X \otimes L_{-x_0})$ et $h^0(X, \Omega^1_X \otimes L_{-x_0-x_1})$.

4) Montrer que $h^0(X, L_{x_0+x_1}) \leq 2$.

3. Courbes hyper-elliptiques

Dans tout l'exercice, X désignera une surface de Riemann connexe compacte de genre g. Une surface de Riemann est dite *hyper-elliptique* si elle se réalise comme revêtement ramifié de degré 2 de la droite projective $\mathbb{P}^1$.

3.1. Revêtements ramifiés. —

1) Montrer que les surfaces de Riemann de genre nul sont hyper-elliptiques.

2) Montrer que les surfaces de Riemann de genre 1 sont hyper-elliptiques.

3) Montrer que les surfaces de Riemann de genre 2 sont hyper-elliptiques.

4) Déterminer le nombre de points de ramification d'un revêtement ramifié $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ de degré 2 en fonction du genre de X.

3.2. Corps de fonctions. —

5) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un corps K soit isomorphe au corps des fonctions méromorphes d'une surface de Riemann X connexe compacte hyper-elliptique.

6) Montrer que X de genre au moins égal à 1 est hyper-elliptique si et seulement si il existe deux points (éventuellement égaux) x_0 et x_1 de X tels que $h^0(X, L_{x_0+x_1}) = 2$.

7) On suppose que X est hyper-elliptique de genre au moins égal à 1. Soit f et g deux fonctions méromorphes de degré 2 sur X. Soit P_f et P_g le diviseur de leur pôle. *On admettra qu'ils sont linéairement équivalents.* Montrer qu'il existe une fonction méromorphe non nulle h et des constantes a, b, c, d telles que

$$\begin{aligned} g &= ah + bhf \\ 1 &= ch + dhf. \end{aligned}$$

8) Montrer que g est la composée de f par un biholomorphisme de $\mathbb{P}^1$.

4. Points de Weierstrass

Dans tout l'exercice, X désignera une surface de Riemann connexe compacte de genre g supérieur à 2 et x_0 un point de X.

4.1. Sauts de Weierstrass. —

1) Pour tout entier k strictement positif, on note $c_k(x_0) := h^0(X, L_{(k)x_0}) - h^0(X, L_{(k-1)x_0})$. Montrer que $0 \leq c_k(x_0) \leq 1$.

2) Montrer que $\sum_{k=1}^{2g-1} c_k(x_0) = h^0(X, L_{(2g-1)x_0}) - 1 = g - 1$.

3) En déduire le nombre d'entiers k entre 1 et $2g-1$ tels qu'il n'existe pas de fonctions méromorphes sur X, holomorphes sur $X - \{x_0\}$, avec un pôle d'ordre exactement k.

4.2. Points de Weierstrass et courbes hyper-elliptiques. —

On dit qu'un point x_0 de X est *de Weierstrass* s'il existe une fonction méromorphe sur X, holomorphe en dehors de x_0 et avec un pôle d'ordre inférieur à g en x_0.

4) On suppose que X est hyper-elliptique. Montrer qu'aux points x_r de ramification de $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ de degré 2, il existe une fonction méromorphe, holomorphe sur $X - \{x_r\}$ avec un pôle d'ordre 2 en x_r.

5) En déduire que les points de ramification sont des points de Weierstrass.

6) En déduire le nombre minimal de points de Weierstrass d'une surface de Riemann hyper-elliptique de genre $g \geq 2$.

7) Déterminer les entiers k entre 1 et $2g-1$ tels qu'il n'existe pas de fonctions méromorphes sur X, holomorphes sur $X - \{x_r\}$, avec un pôle d'ordre exactement k.