UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Partiel de géométrie euclidienne (E01)

Lundi 18 février 2007

Les notes de cours et de TD et les autres documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables (même utilisés comme montre). La notation prendra en compte l'orthographe, la présentation et la clarté des réponses.

1. Du cours (3 points)

Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2. Points fixes (2 points)

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x + 45y - 16z + 8 \\ -76y + 37z - 6 \\ -54z + 76 \end{pmatrix} \end{array}$$

Justifier rapidement que f est affine et démontrer que f a un unique point fixe.

3. Une équation barycentrique (2 points)

Soit (A, B, C) un repère affine d'un plan affine. Soit G_1 le barycentre des points massiques $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 3)$ et G_2 le barycentre des points massiques $(A, -1)$, $(C, 2)$. Déterminer une équation barycentrique de la droite (G_1, G_2).

4. Reconnaître une application affine (4 points)

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -x - 2y - 2z + 2 \\ -4x - 3y - 4z + 4 \\ 4x + 4y + 5z - 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

a.—Déterminer l'ensemble des points fixes de f.
b.—Déterminer les valeurs propres de la partie linéaire de f.
c.—Décrire l'application f et ses éléments caractéristiques.

5. Bases orthonormées (4 points)

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4_{ev}$ muni du produit scalaire standard et de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4). Déterminer une base orthonormée (f_1, f_2, f_3, f_4) de $\mathbb{R}^4_{ev}$, telle que (f_1, f_2) soit une base du plan donné (dans la base canonique) par les équations

$$\begin{cases} x + y + z - 2t = 0 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

6. Construire des applications affines (2,5 points)

Soit A, B, C un triangle non aplati dans un plan affine. Que dire d'une application affine qui fixe chacun des points A, B, C ? Montrer qu'il existe une application affine différente de l'identité qui conserve globalement le triangle ABC.

7. Indépendance des vecteurs orthogonaux (2,5 points)

Montrer qu'un système orthonormé de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien est libre.
