UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Surfaces de Riemann

1. Fonctions sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{P}^1$

1) Quelles sont les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ qui se prolongent en fonctions holomorphes sur $\mathbb{P}^1$?
2) Quelles sont les fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ qui se prolongent en fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}^1$?
3) Quelles sont les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ qui se prolongent en fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}^1$?

2. Ramification

Déterminer les points de ramification de l'application $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, $[X : Y] \mapsto [X^2 : Y^2]$.

3. Corps de fonctions méromorphes

Soit X une surface de Riemann connexe compacte de genre g et a un point de X.
1) Montrer qu'il existe une fonction méromorphe h sur X holomorphe sur $X - \{a\}$ et qui admet un pôle d'ordre exactement $2g + 1$ en a.
2) Montrer que le polynôme $T^2 - h$ d'indéterminée T à coefficients dans le corps $\mathcal{M}(X)$ des fonctions méromorphes sur X est irréductible, c'est à dire que h n'est pas un carré dans $\mathcal{M}(X)$.
3) Déterminer un majorant du genre de la surface de Riemann déterminée par le polynôme $T^2 - h$.
4) Le corps $\mathcal{M}(X)$ est-il algébriquement clos ?

4. Fibrés en droites

Dans tout l'exercice, on travaille sur une surface de Riemann X connexe compacte.
1) Montrer qu'une section holomorphe non nulle d'un fibré holomorphe en droites complexes de degré nul ne s'annule jamais.
2) Montrer qu'un fibré holomorphe en droites complexe avec une section partout non nulle est isomorphe au fibré trivial $X \times \mathbb{C} \to X$.
3) Montrer que si un fibré L et son dual $L^\star$ admettent une section non nulle alors L est isomorphe au fibré trivial.
4) Deux fibrés holomorphes en droites complexes de même degré ont-ils des espaces de sections holomorphes de même dimension ?

5) Soit D un diviseur sur X et L_D la classe d'isomorphisme de fibré en droites associé. Expliciter l'application qui a une fonction méromorphe f de diviseur tel que $div(f) + D \geq 0$ associe une section (U_i, s_i) de L_D

6) On suppose maintenant que $D \geq 0$ (on dit que D est effectif). Déterminer la section 1_D de L_D associée à la fonction constante 1 ainsi que son diviseur dans L_D