Exercices M2 : Surfaces de Riemann

On rappelle le théorème des fonctions implicites dans le cadre holomorphe. Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit (x_0, y_0) un point de $\mathbb{C}^2$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$. Alors $f^{-1}(0)$ est une sous variété analytique complexe de $\mathbb{C}^2$ au voisinage de (x_0, y_0) et $t = y$ peut être choisie comme coordonnée holomorphe au voisinage de (x_0, y_0). Le paramétrage $t \mapsto (x(t), t)$ vérifie alors $x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), t) = 0$.

Dans tous les exercices relatifs aux courbes algébriques planes, on supposera $\mathbb{P}^2$ muni d'un repère projectif et de coordonnées homogènes associées, notées $[X : Y : Z]$. On notera U_Z : $\{[X : Y : Z] \in \mathbb{P}^2, Z \neq 0\}$ et $x := X/Z$, $y := Y/Z$ les coordonnées holomorphes associées. Si $F(X, Y, Z)$ est un polynôme homogène, on notera alors $f(x, y) := F(X, Y, 1)$.

1. Courbes algébriques planes

1) La courbe algébrique plane $\mathcal{C}$ d'équation $F(X, Y, Z) = X^3 + Y^3 + Z^3 = 0$ est-elle lisse ?
2) Si oui, déterminer un recouvrement de $\mathcal{C}$ par des ouverts de carte.
3) Si oui, déterminer son genre.
4) Montrer que la 1-forme définie sur $U_Z \cap \mathcal{C}$ par $\dfrac{dy}{\frac{\partial f}{\partial x}}$ et holomorphe et se prolonge en une 1-forme holomorphe sur $\mathcal{C}$.

2. Diviseurs principaux

1) Soit τ un nombre complexe de partie imaginaire non nulle. Déterminer une base de l'espace des 1-formes holomorphes sur le tore $T = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}1 \bigoplus \mathbb{Z}\tau)$.

2) Le diviseur $0 + 1/2 - 2 \times \tau/2$ est-il principal ?

3. Retour sur les revêtements

1) Soit X une surface de Riemann compacte. On fixe n points sur X. Montrer qu'il existe une fonction méromorphe sur X qui prend des valeurs deux à deux distinctes en ces n points.

2) Montrer que si $p : X \to Y$ est un morphisme non constant de degré d entre surfaces de Riemann compactes alors $p^\star$ fait de $\mathcal{M}(X)$ une extension algébrique de $\mathcal{M}(Y)$ de degré exactement d.

4. Espace de sections holomorphes

Soit X une surface de Riemann et L un fibré en droites holomorphe sur X. On suppose que l'espace des sections holomorphes de L sur X est de dimension N.

1) Construire un N-uplet P de points de X tel que toute section de L nulle en P est identiquement nulle.

2) On fixe un point x_0 et une coordonnée holomorphe z au voisinage U de carte de x_0. On considère d fonctions holomrphes $(u_i)_{i=1}^d$ sur U. Montrer par récurrence sur d que le déterminant

$$W(u_1, \cdots, u_d) := \det \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) & \cdots & u_d(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) & \cdots & u_d'(z) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_1^{(d-1)}(z) & u_2^{(d-1)}(z) & \cdots & u_d^{(d-1)}(z) \end{pmatrix}$$

est identiquement nul au voisinage de x_0 si et seulement si les fonctions holomrphes $(u_i)_{i=1}^d$ sont linéairement dépendantes.

3) On choisit un ensemble $(s_i)_{i=1}^d$ de sections holomorphes de L sur X. On fixe un point x_0 et une coordonnée holomorphe z au voisinage U de carte trivialisant L de x_0. La section s_i est donnée par la fonction holomorphe u_i sur U. Montrer par récurrence sur d que le déterminant

$$\det \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) & \cdots & u_d(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) & \cdots & u_d'(z) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_1^{(d-1)}(z) & u_2^{(d-1)}(z) & \cdots & u_d^{(d-1)}(z) \end{pmatrix}$$

est identiquement nul au voisinage de x_0 si et seulement si les sections s_i sont linéairement dépendantes.

5. Fibrés et plongements

Peut-on plonger une surface de Riemann de genre 2 dans un espace projectif de dimension 2 ? Soit X une surface de Riemann de genre au moins 2. Déterminer une puissance tensorielle du fibré Ω_X^1 dont l'espace des sections permet de plonger X dans un espace projectif. Déterminer alors la dimension de cet espace projectif.

6. Points de Weierstrass

Dans tout l'exercice, X désignera une surface de Riemann connexe compacte de genre g supérieur à 2 et x_0 un point de X.

6.1. Sauts de Weierstrass. —

1) Pour tout entier k strictement positif, on note $c_k(x_0) := h^0(X, L_{(k)x_0}) - h^0(X, L_{(k-1)x_0})$. Montrer que $0 \leq c_k(x_0) \leq 1$.

2) Montrer que $\sum_{k=1}^{2g-1} c_k(x_0) = h^0(X, L_{(2g-1)x_0}) - 1 = g - 1$.

3) En déduire le nombre d'entiers k entre 1 et $2g-1$ tels qu'il n'existe pas de fonctions méromorphes sur X, holomorphes sur $X - \{x_0\}$, avec un pôle d'ordre exactement k.

6.2. Points de Weierstrass et courbes hyper-elliptiques. —

On dit qu'un point x_0 de X est *de Weierstrass* s'il existe une fonction méromorphe sur X, holomorphe en dehors de x_0 et avec un pôle d'ordre inférieur à g en x_0.

4) On suppose que X est hyper-elliptique. Montrer qu'aux points x_r de ramification de $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ de degré 2, il existe une fonction méromorphe, holomorphe sur $X - \{x_r\}$ avec un pôle d'ordre 2 en x_r.

5) En déduire que les points de ramification sont des points de Weierstrass.

6) En déduire le nombre minimal de points de Weierstrass d'une surface de Riemann hyper-elliptique de genre $g \geq 2$.

7) Déterminer les entiers k entre 1 et $2g - 1$ tels qu'il n'existe pas de fonctions méromorphes sur X, holomorphes sur $X - \{x_r\}$, avec un pôle d'ordre exactement k.

7. Géométrie hyperbolique

1) Déterminer un élément de $PSL(2, \mathbb{R})$ qui agit sans point fixe sur le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$.

2) Déterminer un élément de $PSL(2, \mathbb{R})$ qui agit avec un point fixe sur le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$.

3) Soit a et b deux nombres réels tels que $-1 < a < b < 1$. On rappelle que l'aire hyperbolique d'une région A de H est

$$\int_A \frac{dxdy}{y^2}.$$

Calculer l'aire hyperbolique de la région définie par $x^2 + y^2 \geq 1$, $a \leq x \leq b$.

8. Quartique de Klein

Soit $\mathcal{Q}$ la courbe algébrique définie par le polynôme homogène $F(X, Y, Z) = X^3Y + Y^3Z + Z^3X$.

1) La courbe $\mathcal{Q}$ est-elle lisse. Si oui, déterminer son genre.

2) Décrire un automorphisme de $\mathcal{Q}$ d'ordre 3.

3) Soit $w := \exp(2i\pi/7)$. Montrer que $(X, Y, Z) \mapsto (wX, w^4Y, w^2Z)$ est un automorphisme de $\mathcal{Q}$ et calculer son ordre.

4) Soit $a := w^5 - w^2$, $b := w^3 - w^4$, $c := w^6 - w$. Montrer que

$$(X, Y, Z) \mapsto \begin{cases} aX + bY + cZ \\ bX + cY + aZ \\ cX + aY + bZ \end{cases}$$

est un automorphisme et calculer son ordre.

5) En déduire un minorant de l'ordre du groupe des automorphismes de $\mathcal{Q}$.