COURBES ALGEBRIQUES, SURFACES DE RIEMANN

Exercices

EXERCICE 1

1) Montrer qu'un revêtement double d'une surface de Riemann compacte est ramifié en un nombre pair de points.

2) Déterminer le genre d'une surface de Riemann revêtement double de $\mathbb{P}^1$ ramifié en $2n$ points.

3) Déterminer le genre de la surface de Riemann de $\sqrt[n]{z}$.

4) Expliciter l'extension de corps associé au morphisme $\mathbb{P}^1$ dans lui-même qui envoie z sur z^n.

5) Soit $F = ZY^2 - X^3 - Z^3$. Montrer que X_F est lisse. Déterminer les points de ramification de l'application $X_F \to \mathbb{P}^1_{[X:Z]}$ restriction de la projection $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1_{[X:Z]}$, $[X : Y : Z] \to [X : Z]$.
En déduire le genre de X_F.

EXERCICE 2 (genre nul)

On considère un point a de l'espace projectif $P(V)$ des droites d'un espace vectoriel complexe V de dimension 2.

1) Décrire des cocycles pour un fibré holomorphe en droites complexes $L = L_a$ associé au diviseur a.

2) Calculer la dimension de l'espace de sections holomorphes de L^k.

3) Construire une application linéaire injective $f : S^kV^\star \to H^0(X, L^k)$

4) Expliciter en termes de coordonnées homogènes l'application $\phi_{|L^2|}$ associée aux sections de L^2.

5) On choisit une base de V qui fournit des coordonnées homogènes $[X : Y]$ sur $P(V)$. Quelle est la singularité à l'infini ($[1 : 0]$) de la 1-forme holomorphe $dx = d(X/Y)$? Existe-il une 1-forme méromorphe sur $P(V)$ avec un unique pôle d'ordre 1 ?

EXERCICE 3

Dans tout l'exercice, on fixe sur $\mathbb{P}^2 := \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ des coordonnées homogènes $[X : Y : Z]$ et des coordonnées affines $x = X/Z$, $y = Y/Z$ dans l'ouvert $Z \neq 0$. F est un polynôme homogène de degré d en trois variables, X_F la courbe algébrique plane associée qu'on supposera toujours lisse et $f(x, y) = F(x, y, 1)$. On supposera aussi que le repère projectif est choisi de sorte que la fonction x n'est pas constante sur X_F et que le résultant de f par rapport à y n'est pas identiquement nul.

1) Décrire l'application $X_F \to \mathbb{P}^1_{[X:Z]}$ restriction de la projection $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1_{[X:Z]}$, $[X:Y:Z] \to [X:Z]$.

2) Montrer qu'il existe un point x_0 qui ne soit pas l'abscisse d'un point de $X_F \cap (Z=0)$ et tel que $res_y(f) \in \mathbb{C}[x]$ soit non nul en x_0. Montrer que le corps des fonctions méromorphes sur X_F est engendré par les restrictions à X_F de x et de y. En déduire que les fonctions méromorphes sur X sont les restrictions des fonctions rationnelles sur $\mathbb{P}^2$.

EXERCICE 4 (retour sur les revêtements)

1) Soit X une surface de Riemann compacte. On fixe n points sur X. Montrer qu'il existe une fonction méromorphe sur X qui prend des valeurs deux à deux distinctes en ces n points.

2) Montrer que si $p : X \to Y$ est un morphisme non constant de degré d entre surfaces de Riemann compactes alors $p^\star$ fait de $\mathcal{M}(X)$ une extension algébrique de $\mathcal{M}(Y)$ de degré exactement d.

EXERCICE 5 (genre 1)

1) Soit τ un nombre complexe de partie imaginaire non nulle. Déterminer une base de l'espace des 1-formes holomorphes sur le tore $T = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}1 \bigoplus \mathbb{Z}\tau)$.

2) Le diviseur $0 + 1/2 - 2 \times \tau/2$ est-il principal ?

3) Existe-il une 1-forme méromorphe sur T avec un unique pôle d'ordre exactement 1 ? et avec un unique pôle d'ordre exactement 2 ?

EXERCICE 6 (genre supérieur à 2)

Peut-on plonger une surface de Riemann de genre 2 dans un espace projectif de dimension 2 ? Soit X une surface de Riemann de genre au moins 2. Déterminer une puissance tensorielle du fibré Ω^1_X dont l'espace des sections permet de plonger X dans un espace projectif. Déterminer alors la dimension de cet espace projectif.

EXERCICE 7 (genre supérieur à 2)

On considère une courbe algébrique plane X_F lisse de degré supérieur à 3 donnée par l'équation $F(X,Y,Z)$. On considère une forme holomorphe ϖ sur X_F par exemple donnée sous la forme $\dfrac{p(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}}dx$ où p est un polynôme de degré inférieur à $d-3$. On fixe un point a de X. Montrer que si (p_i) sont les d points d'intersection de X_F avec une droite de $\mathbb{P}^2$, la quantité

$$\sum \int_a^{p_i} \varpi mod P$$

où P est le réseau des périodes complexes, ne dépend pas de la droite choisie.