Examen M2
Courbes algébriques et surfaces de Riemann

Les notes de cours et de TD sont autorisées. Les autres documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables.

1. Fonctions sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{P}^1$

1) Quelles sont les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ qui se prolongent en fonctions holomorphes sur $\mathbb{P}^1$?
2) Quelles sont les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ qui se prolongent en fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}^1$?
3) Quelles sont les fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ qui se prolongent en fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}^1$?

2. Géométrie projective

1) Par six points donnés de $\mathbb{P}^2$ peut-on faire passer une cubique ?
2) Par six points donnés de $\mathbb{P}^2$ peut-on faire passer une cubique lisse?
3) Six points donnés sur une cubique lisse de $\mathbb{P}^2$ peuvent-ils toujours être réalisés comme intersection avec une conique?
4) Six points donnés sur une conique de $\mathbb{P}^2$ peuvent-ils toujours être réalisés comme intersection avec une cubique ?

3. Rationalité

1) Quel est le nombre maximal de points singuliers d'une quintique irréductible ? (courbe algébrique projective plane de degré 5) ?
2) Expliquer comment paramétrer rationnellement une quintique irréductible avec un nombre maximal de points singuliers. (Décrire un système linéaire, calculer sa dimension et démontrer la surjectivité générique ainsi que l'injectivité générique du paramétrage).
3) Donner l'exemple d'une quintique avec strictement plus de points singuliers, que dans le calcul de la première question.
4) Déterminer un développement à l'ordre 3 [c'est à dire sous la forme $x(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 + O(t^4)$, $y(t) = a' + b't + c't^2 + d't^3 + O(t^4)$] des places en $[0 : 0 : 1]$ de la quintique d'équation $X^5 + Z(X^4 - Y^4) = 0$.
5) Donner un paramétrage rationnel explicite de cette quintique.

4. Corps de fonctions méromorphes

Soit X une surface de Riemann connexe compacte de genre g et a un point de X.

1) Montrer qu'il existe une fonction méromorphe h sur X holomorphe sur $X - \{a\}$ et qui admet un pôle d'ordre exactement $2g + 1$ en a.

2) Montrer que le polynôme $T^2 - h$ d'indéterminée T à coefficients dans le corps $\mathcal{M}(X)$ des fonctions méromorphes sur X est irréductible, c'est à dire que h n'est pas un carré dans $\mathcal{M}(X)$.

3) Déterminer un majorant du genre de la surface de Riemann déterminée par le polynôme $T^2 - h$.

4) Le corps $\mathcal{M}(X)$ est-il algébriquement clos ?

5. Fibrés en droites

Dans tout l'exercice, on travaille sur une surface de Riemann X connexe compacte.

1) Montrer qu'une section holomorphe non nulle d'un fibré holomorphe en droites complexes de degré nul ne s'annule jamais.

2) Montrer qu'un fibré holomorphe en droites complexe avec une section partout non nulle est isomorphe au fibré trivial $X \times \mathbb{C} \to X$.

3) Montrer que si un fibré L et son dual $L^\star$ admettent une section non nulle alors L est isomorphe au fibré trivial.

4) Deux fibrés holomorphes en droites complexes de même degré ont-ils des espaces de sections holomorphes de même dimension ?

6. Fonctions méromorphes multiplicatives sur une courbe elliptique

Dans ce problème, on peut admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes.

Soit τ un nombre complexe de partie imaginaire strictement positive, et Γ le réseau de $\mathbb{C}$ engendré par 1 et τ. On note $X = \mathbb{C}/\Gamma$ la surface de Riemann associée. Elle est compacte et de genre 1. L'image des segments de droites $[0, 1]$ et $[0, \tau]$ donne un couple de générateurs de son groupe fondamental.

1) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ périodique de période 1 et $f(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2i\pi n u}$ son développement de Fourier. Ecrire la condition de périodicité de période τ à l'aide des coefficients de Fourier. Déterminer les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ périodiques de période 1 et τ.

2) On cherche maintenant les fonctions holomorphes périodiques de période 1 pour lesquelles le coefficient de Fourier a_0 vaut 1 et

$$\forall u \in \mathbb{C}, f(u + \tau) = e^{-2i\pi(u+\tau/2)} f(u).$$

Déterminer ces fonctions. On notera $\theta(u)$ une solution.

3) Calculer les différences de valeurs $(d\theta/\theta)(u+1) - (d\theta/\theta)(u)$ et $(d\theta/\theta)(u+\tau) - (d\theta/\theta)(u)$ de la forme méromorphe $d\theta/\theta$.

En déduire le nombre de zéros de θ dans le parallélogramme $\mathcal{P}$ de sommets 0, 1, $1+\tau$ et τ. [On admettra que θ n'a pas de zéros sur le bord de $\mathcal{P}$. Il suffirait en fait de translater le parallélogramme $\mathcal{P}$ pour se mettre sous cette condition.]

Montrer que $\zeta = (1+\tau)/2$ est un zéro de θ.

4) Soit $D = \sum_{j=1}^{N} p_j - \sum_{k=1}^{N} q_k$ un diviseur de X. Soit

$$F(u) = \frac{\Pi_j \theta(u - p_j + \zeta)}{\Pi_k \theta(u - q_k + \zeta)}$$

Montrer que la fonction méromorphe F est périodique de période 1. Montrer que F est une fonction méromorphe multiplicative, pour une représentation non nécessairement unitaire. Déterminer alors son diviseur.

5) Déterminer une condition sur D qui assure que pour un $m \in \mathbb{Z}$ bien choisi, la fonction $G(u) = e^{-2i\pi m u} F(u)$ est aussi périodique de période τ.

Enoncer la partie du théorème d'Abel ainsi démontrée.