UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Examen M2 : Surfaces de Riemann

Lundi 17 décembre 2007

Les notes de cours et de TD sont autorisées. Les autres documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables. Il est conseillé d'étudier les questions dans l'ordre.

1. Préliminaires

1) Déterminer la dimension de l'espace des polynômes homogènes de degré n en trois variables.
2) Déterminer le cardinal de $PSL(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$
3) Montrer que $2i$ n'est fixé par aucun élément de $PSL(2, \mathbb{Z})$ autre que l'identité.

2. Calcul de genre d'une courbe algébrique plane

On supposera $\mathbb{P}^2$ muni d'un repère projectif et de coordonnées homogènes associées, notées $[X : Y : Z]$. On notera $U_Z : \{[X : Y : Z] \in \mathbb{P}^2, Z \neq 0\}$ et $x := X/Z$, $y := Y/Z$ les coordonnées holomorphes associées.
1) Soit d un entier naturel non nul. On considère la courbe $\mathcal{C}_d$ d'équation $X^d + Y^d + Z^d = 0$. Montrer que $\mathcal{C}_d$ est lisse.
2) Expliciter un recouvrement de $\mathcal{C}_d$ en ouverts de cartes.
3) Montrer que la restriction π à $\mathcal{C}_d$ de l'application $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1$, $[X : Y : Z] \mapsto [X : Y]$ est bien définie.
4) Montrer que π admet dans chaque ouvert de cartes une expression à l'aide de fonctions holomorphes. En déduire que π est holomorphe et non constante.
5) Déterminer le degré et les points de ramification de l'application π.
6) Retrouver le genre de $\mathcal{C}_d$ à l'aide de l'application π.

3. Plongement canonique d'une surface de Riemann compacte

On rappelle qu'une surface de Riemann compacte X de genre au moins égal à 1 est hyperelliptique si et seulement si il existe deux points (éventuellement égaux) x_0 et x_1 de X tels que $h^0(X, L_{x_0+x_1}) = 2$.
Montrer que toutes les surfaces non-hyperelliptiques se plongent dans un espace projectif à l'aide des sections du fibré canonique Ω^1.

4. Application d'Abel-Jacobi

Donner une condition nécessaire et suffisante sur une surface de Riemann X qui assure que l'application d'Abel Jacobi $S^2X \to Jac(X)$ est injective.

5. Points de Weierstrass

Soit X une surface de Riemann connexe compacte de genre g supérieur à 2. On dit qu'un point x_0 de X est *de Weierstrass* s'il existe une fonction non constante méromorphe sur X, holomorphe en dehors de x_0 et avec un pôle d'ordre inférieur à g en x_0.

1) Montrer que x_0 est de Weierstrass si et seulement si $H^0(X, \Omega^1_X(-gx_0))$ est non nul.

2) Soit $(\Phi_i)_{i=1,\cdots g}$ une base de l'espace des 1-formes holomorphes sur X. Soit x_0 un point de X et z une coordonnée holomorphe au voisinage de x_0. Soit $\Phi_i = u_i(z)dz$ l'expression locale de Φ_i. Montrer que le point de coordonnée z est un point de Weierstrass si et seulement si

$$[u_1, \cdots, u_g] := \det \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) & \cdots & u_g(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) & \cdots & u_g'(z) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_1^{(g-1)}(z) & u_2^{(g-1)}(z) & \cdots & u_g^{(g-1)}(z) \end{pmatrix} = 0.$$

3) Montrer que le déterminant précédent définit une section holomorphe du fibré $(\Omega^1_X)^{\otimes \frac{g(g+1)}{2}}$.

4) Vérifier dans le cas $g = 2$ que la fonction précédentes est non nulle. *On l'admettra dans le cas général.*

5) En déduire le nombre maximal de points de Weierstrass de X.

6. Automorphismes et points de Weierstrass

Dans tout l'exercice, X désignera une surface de Riemann connexe compacte de genre g supérieur à 2 et x_0 un point de X. On supposera que X admet au moins $2g+3$ points de Weierstrass distincts. *On peut montrer que cette hypothèse est satisfaite pour toutes les surfaces de Riemann compactes non hyperelliptiques. On pourra admettre le résultat de l'exercice précédent.*

1) Montrer que les automorphismes de X préservent globalement l'ensemble des points de Weierstrass de X. En déduire un morphisme de $Aut(X)$ dans un groupe fini.

2) Soit T un automorphisme de X différent de l'identité et x_0 un point non fixé par T. Montrer qu'il existe une fonction non constante méromorphe f holomorphe sur $X - \{x_0\}$ avec un pôle d'ordre inférieur à $g+1$ en x_0.

3) En considérant $f - f \circ T$ déterminer le nombre maximal de points fixes de T.

4) Montrer que X n'a qu'un nombre fini d'automorphismes, et à l'aide de l'exercice précédent, donner un majorant de ce nombre.

7. Géométrie hyperbolique

On considère le morphisme de groupes r qui à une matrice de $PSL(2,\mathbb{Z})$ associe la matrice de $PSL(2,\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ obtenue par réduction modulo 7 des coefficients. On notera $\Gamma(7)$ son noyau. *On admet que le morphisme r est surjectif*

1) Montrer en étudiant les vecteurs propres que les éléments A de $SL(2,\mathbb{R})$ dont la trace vérifie $(traceA)^2 \geq 4$ n'ont pas de points fixes dans le demi-plan $\mathcal{H}$ de Poincaré.

2) En déduire que $\Gamma(7)$ agit sans point fixes sur $\mathcal{H}$.

On admet que $\Gamma(7)$ agit proprement discontinument sur $\mathcal{H}$ et on note X_7 la surface de Riemann quotient $\Gamma(7)\backslash\mathcal{H}$.

3) Montrer que les éléments de $PSL(2,\mathbb{Z})/\Gamma(7)$ agissent naturellement à gauche par biholomorphismes sur X_7.

4) Déterminer un minorant du cardinal du groupe des automorphismes de X_7