UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Examen de géométrie euclidienne (E01)

juin 2008

Les notes de cours et de TD et les autres documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables (même utilisés comme montre). Toutes les réponses devront être justifiées. La notation prendra en compte l'orthographe, la présentation et la clarté des réponses.

1. Du cours (6 points)

1. Démontrer que les médiatrices d'un triangle sont concourantes.
2. Rappeler la définition et la construction de l'axe radical de deux cercles dans un plan affine euclidien.
3. Donner dans un plan affine euclidien, l'exemple d'une symétrie s et d'une translation t différente de l'identité telle que $t \circ s$ admette un point fixe.
4. Donner dans un plan affine euclidien, l'exemple d'une symétrie s et d'une translation t telles que $t \circ s \neq s \circ t$.
5. Dans le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ standard identifié au plan complexe, la transformation $z \mapsto i\bar{z} + 3$ est-elle une transformation affine ? est-elle une isométrie ?
6. Donner l'exemple d'une conique plane avec une infinité de centres de symétrie.

2. Orthogonalité dans l'espace (2 points)

On considère l'espace affine $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire standard.

1. Deux droites orthogonales à une même troisième sont-elles parallèles ?
2. Deux droites orthogonales à un même plan sont-elles parallèles ? (N'oubliez pas de justifier vos réponses).

3. Expressions analytiques (3 points)

Dans un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, donner l'expression analyique de la symétrie glissée d'axe d d'équation $x + y = 1$ et de vecteur $\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}$.

4. A l'aide de la classification (3 points)

Déterminer (s'il en existe) une isométrie J de l'espace affine euclidien E de dimension 3 telle que $J \circ J = -Id_E$.

5. Groupe d'isométries (3 points)

On cherche à décrire le groupe G des isométries d'un plan affine euclidien qui conservent globalement un triangle $\mathcal{T} = ABC$ isocèle en A non équilatéral non aplati.

1. Déterminer deux éléments différents du groupe G.
2. Soit f un élément de G.
   (a) Montrer que f a un point fixe.
   (b) Montrer que $f(A) = A$ et que ($f(B) = B$ ou $f(B) = C$).
   (c) Montrer que f est soit l'identité soit une réflexion.
3. Écrire la table de multiplication du groupe G.

6. Construction (3 points)

1. Construire à la règle et au compas la tangente à un cercle $\mathcal{C}$ passant par un point A hors du disque délimité par $\mathcal{C}$.
2. Soit maintenant $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles non concentriques. Construire les centres Ω et O des homothéties qui envoient $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$.
3. Construire deux tangentes communes à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}'$.

Le corrigé sera disponible sur internet.