Corrigé de l'examen de géométrie euclidienne

14 Avril 2008

Exercice 1 (Du cours) 1 - Soit Ω un point du plan P et θ un nombre réel.

L'image d'un point M du plan affine euclidien orienté P par la rotation de centre Ω et d'angle θ est l'unique point M' de P tel que les distances ΩM et $\Omega M'$ soient égales et que la mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}})$ soit égale à θ modulo 2π.
Pour mesurer les distances et l'angle, il est nécessaire que P soit muni d'un produit scalaire et d'une orientation.

2 - Soit ABC un triangle rectangle et $A'B'C'$ un triangle ~~équilatéral~~ équilatéral dans un plan affine euclidien.
L'application affine qui envoie A sur A' et dont la partie linéaire envoie $\overrightarrow{AB}$ sur $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AC}$ sur $\overrightarrow{A'C'}$ envoie le triangle rectangle ABC sur le triangle équilatéral $A'B'C'$.
Par contre, puisqu'une isométrie conserve la mesure des angles il n'existe pas d'isométrie qui transforme un triangle rectangle en un triangle équilatéral.

3 - Une symétrie glissée par rapport à un plan n'a pas de point fixe (si son vecteur de translation est non nul) et a pour déterminant -1 car sa matrice dans une base adaptée est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4 - Pour décomposer un vissage, il suffit de décomposer la rotation et la translation qui le composent.
La rotation est composée de deux réflexions d'axes sécants sur l'axe de la rotation et faisant dans le plan orthogonal un angle de mesure la moitié de l'angle de la rotation.

Pour décomposer la translation, il faut utiliser deux réflexions d'axes orthogonaux à la direction de translation et dont l'un est image de l'autre par la translation de vecteur moitié du vecteur de la translation à décomposer.

5 - Soit $\mathcal{C}$ un cercle d'un plan affine euclidien P et M un point de P.
La quantité $\vec{MA} \cdot \vec{MA'}$ où $\{A, A'\}$ est l'intersection d'une droite sécante à $\mathcal{C}$ passant par M est indépendante de la droite sécante choisie. On l'appelle puissance de M par rapport à $\mathcal{C}$ et on la note $P_{\mathcal{C}}(M)$

Si M est dans le disque délimité par $\mathcal{C}$, $P_{\mathcal{C}}(M) < 0$.
Si M est sur $\mathcal{C}$, $P_{\mathcal{C}}(M) = 0$
Si M est hors du disque fermé délimité par $\mathcal{C}$, $P_{\mathcal{C}}(M) > 0$

6 - L'image du segment $[AB]$ où $A(0)$, $B(1)$ est le segment $[A'B']$ avec $A'(3)$ $B'(5)$.
La transformation ne conserve pas les longueurs : ce n'est donc pas une isométrie.
Par contre, l'expression analytique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x+3 \\ -y \end{pmatrix}$$

est en chaque coordonnée, polynomiale de degré 1 en x et y
C'est donc une application affine.

7 - Une parabole n'a pas de centre de symétrie.

Exercice 2 — Produit scalaire

1 – Il faut montrer que f est bilinéaire, symétrique et définie positive.

[Les vérifications de la symétrie et de la bilinéarité sont simples]

On vérifie que

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (x+y)^2 + 2\,(x+2y)^2$$

Donc $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \geqslant 0$ $\qquad$ f est positive

Si $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 0$ alors $x+y=0$ et $x+2y=0$

Donc $x = y = 0$. et f est donc définie.

2 – L'inégalité de Cauchy-Schwarz est

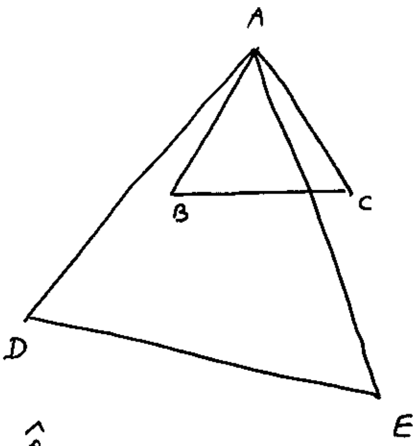
$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \forall \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right)^2 \leq f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \times f\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right)$$

càd $\left(3\,xx' + 5\,xy' + 5\,yx' + 9\,yy'\right)^2 \leq \left(3x^2 + 10xy + 9y^2\right)\left(3(x')^2 + 10x'y' + 9(y')^2\right)$

Exercice 3

1 - On considère la rotation r de centre A et d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \hat{\theta}$



Comme $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \hat{\theta}$

$r(B) = C$

Comme $AD = AE$ et $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \hat{\theta}$

(puisque ADE est aussi équilatéral)

$r(D) = E$.

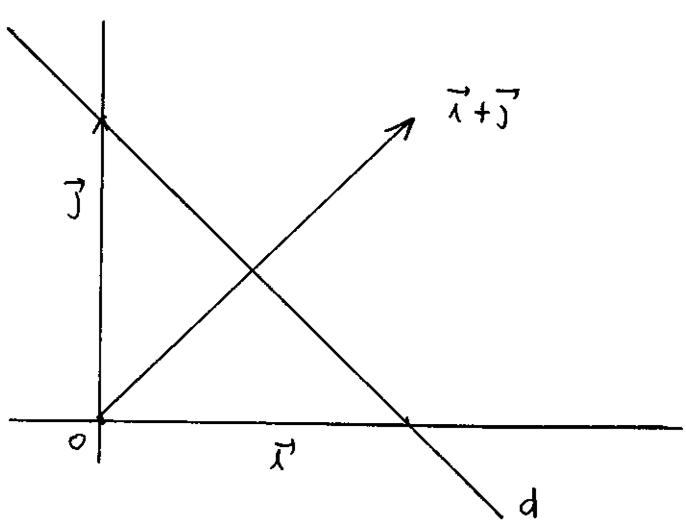
2) Comme une isométrie conserve les longueurs

$$BD = r(B)\,r(D) = CE.$$

Exercice 4

1) La translation t de vecteur $\vec{i} + \vec{j}$ est la composée de s suivie de la symétrie orthogonale s' d'axe d' d'équation $x + y = 2$

Donc $t \circ s = s' \circ s \circ s = s'$



2) $T \circ t = t_{\vec{i} - \vec{j}} \circ t_{\vec{i} + \vec{j}} = t_{2\vec{i}}$

3) $r \circ s = t_{2\vec{i}} \circ s = (T \circ t) \circ s = T \circ (t \circ s) = T_{\vec{i}-\vec{j}} \circ s'$. Comme $\vec{i} - \vec{j} \parallel \vec{d'}$

C'est la symétrie glissée d'axe d' de vecteur $\vec{i} - \vec{j}$.

Exercice 5 (Coniques)

1 - Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in P$. Notons $s(M) = M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Le milieu de $[MM']$ appartient à d, donc $\frac{x+x'}{2} + \frac{y+y'}{2} = 1$

et $x' + y' = 2 - (x+y)$

La droite (MM') est orthogonale à d, donc $\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

soit $-x' + y' = -x + y$

On trouve

$$s : \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & P \\ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & s(M)\begin{pmatrix} 1-y = x - (x+y-1) \\ 1-x = y - (x+y-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

2 - Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point de la conique. On a $2x^2 + 2y^2 + 4xy - 5x - 3y + 2 = 0$

$$2(1-y)^2 + 2(1-x)^2 + 4(1-y)(1-x) - 5(1-y) - 3(1-x) + 2$$

$$= 2x^2 + 2y^2 - 4xy + x(-4 - 4 + 3) + y(-4 - 4 + 5) + (2 + 2 + 4 - 5 - 3 + 2$$

$$= 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 5x - 3y + 2$$

$= 0$. Donc $s(M) \in \mathcal{C}$

Donc d est un axe de symétrie de la conique $\mathcal{C}$.