

17/03

Surface de Riemann

Bibli: Forster - Lectures on Riemann surfaces.
Farkas - Kra - Riemann Surfaces

Christophe - mourogane @ univ - vers 1. fr.

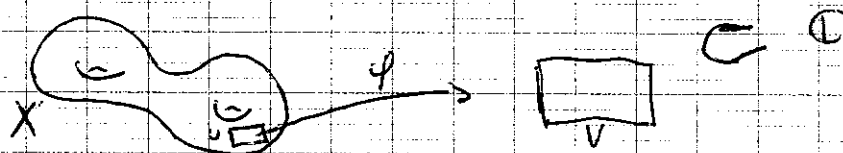
Chap I

Définitions et exemples

Ij Définitions

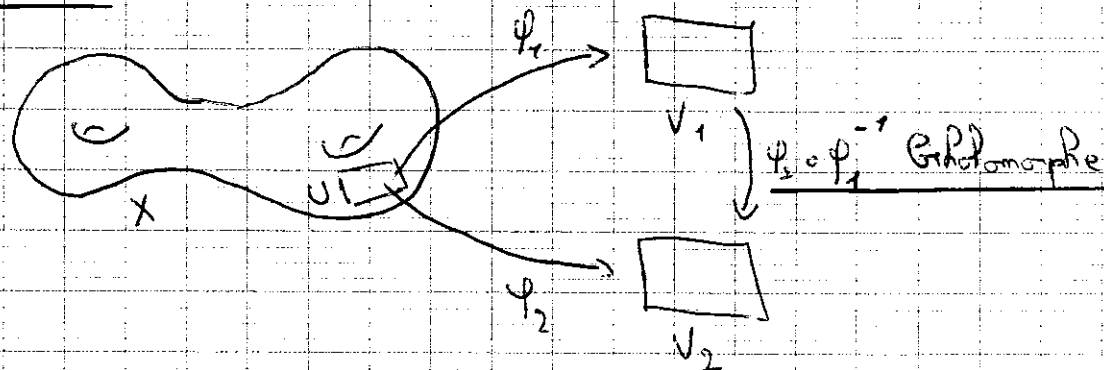
dans tout le cours, les espaces topologiques seront supposés séparés et réunion dénombrable de compacts.

• Sur un espace topologique X , une carte holomorphe de dimension complexe 1 est un homéomorphisme φ d'un ouvert U de X vers un ouvert V de $\mathbb{C}$



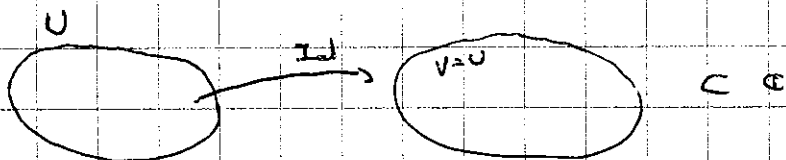
permet de localiser des points de X à l'aide d'un nombre complexe

• Deux cartes φ_1 et φ_2 sur un même ouvert U de X sont dites compatibles si

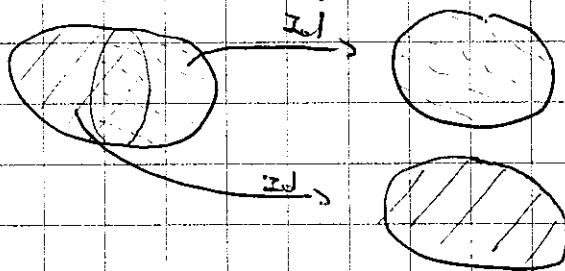


- Sur un espace topologique X , deux cartes φ_1 et φ_2 (Rd de dim complexe 1) sont compatibles si leur domaine U_1 et U_2 sont disjoints ou bien si φ_1 et φ_2 sont compatibles sur $U_1 \cap U_2$.
- Un atlas analytique complexe de dimension 1 sur X est la donnée de cartes holomorphes de dim 1 deux à deux compatibles et dont les domaines recouvrent X .
- Deux atlas sont dits compatibles si leur réunion est un atlas.
- Une structure de surfaces de Riemann sur un espace topologique X est la donnée d'une classe d'équivalence d'atlas analytique complexe de dim 1.

Exemple: Si U est ouvert de $\mathbb{C}$



U est donc une surface de Riemann



Ces deux atlas donnent la même structure de surfaces de Riemann.

$\mathbb{C}^2$ n'est pas une surface de Riemann
 → contredit les critères de dimension.

II. Exemples.

• Tout ouvert d'une surface de Riemann est une surface de Riemann (avec un atlas induit).

• Le plan projectif complexe $\mathbb{P}_\mathbb{C}^1$ (l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{C}^2$)

On choisit une base de $\mathbb{C}^2$ et on obtient des coordonnées homogènes $[X_0 : X_1]$

Sur l'ouvert $\{X_0 \neq 0\}$ on considère la carte

$$\begin{aligned} \{X_0 \neq 0\} &\xrightarrow{\varphi_0} \mathbb{C} \\ [X_0 : X_1] &\mapsto \frac{X_1}{X_0} \end{aligned}$$

Sur l'ouvert $\{X_1 \neq 0\}$

$$\begin{aligned} \{X_1 \neq 0\} &\xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{C} \\ [X_0 : X_1] &\mapsto \frac{X_0}{X_1} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}_\mathbb{C}^1 = \{X_0 \neq 0\} \cup \{X_1 \neq 0\}$$

$$\{X_0 \neq 0\} \cap \{X_1 \neq 0\}$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \swarrow \varphi_0 \\ \frac{X_1}{X_0} \\ \mathbb{C}^* \\ \mathbb{Z} \end{array} & \xrightarrow{\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}} & \begin{array}{c} \searrow \varphi_1 \\ \frac{X_0}{X_1} \\ \mathbb{C}^* \\ \frac{1}{\mathbb{Z}} \end{array} \\ & & \text{Biholomorphisme} \end{array}$$

Exercice : Montrer que la structure de surfaces de Riemann sur $\mathbb{P}_\mathbb{C}^1$ ne dépend pas du choix de la base de $\mathbb{C}^2$

• Le graphe d'une application $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$
 $z \mapsto (f_1(z), \dots, f_n(z))$

Pour une carte $\rightarrow$ Polymorphe (toutes les f_i sont holomorphes).
 La continuité suffit.
 est une surface de Riemann.

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \supset \text{graphe}(f) = \{ (z, f_1(z), \dots, f_n(z)) \mid z \in \mathbb{C} \}$$

$$(z, g(z))$$

$\text{graphe}(f) \longrightarrow \mathbb{C}$ est un difféomorphisme
 $(z, z, \dots, z) \longmapsto z$
 (donc une carte et un atlas)

• Plus généralement, cet exemple se généralise au cas d'une application holomorphe $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ à différentielle

$$d_z F: T_z \mathbb{C} \rightarrow T_z \mathbb{C}^{n+1}$$

$$\mathbb{C} \quad \mathbb{C}^{n+1}$$

Holomorphe partout de rang 1

L'image de F est alors une surface de Riemann.

• Soit $f_1, \dots, f_n$ fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^{n+1}$

telles que en tout point de $\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(0)$

$$\text{rang} \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n+1}} = n$$

alors $\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(0)$ est une surface de Riemann
 (Théorème des fonctions implicites)

• Tous complexes de dimension 1.

Soient ω_1 et ω_2 deux nombres complexes $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants.

Γ le $\mathbb{Z}$ -sous-module de $(\mathbb{C}, +)$ engendré par ω_1 et ω_2 .

$\mathbb{C}/\Gamma$ le groupe quotient peut être muni d'une structure de surface de Riemann.

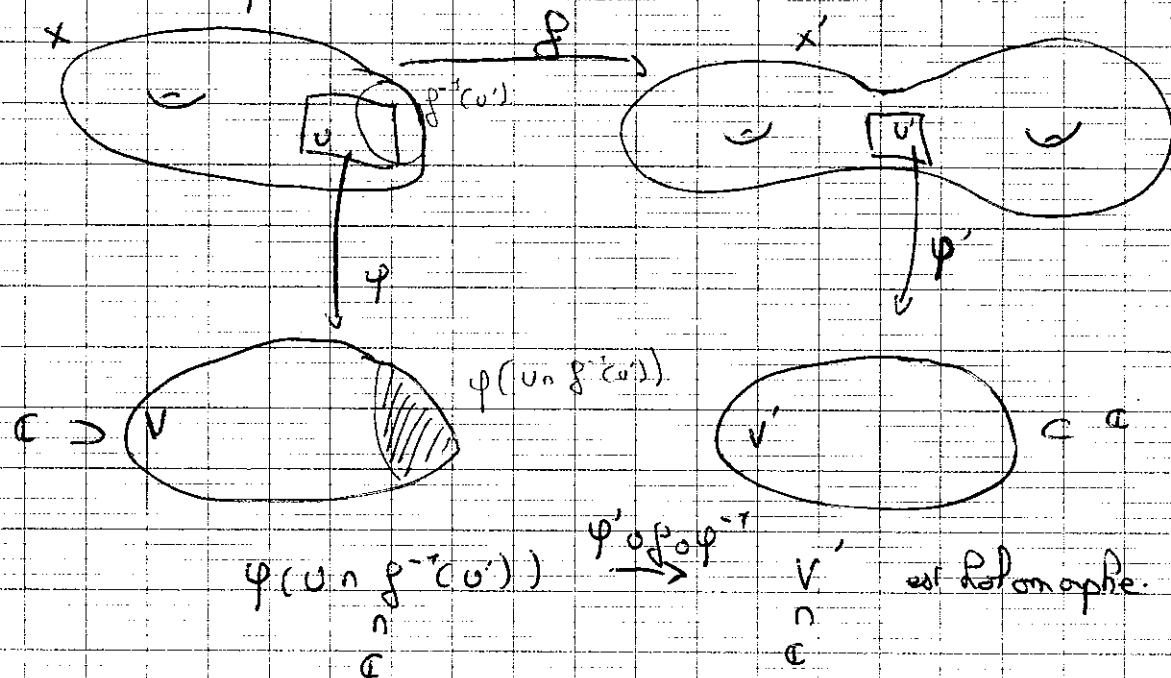
Les cartes locales sont des inverses locales de l'application

$$p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma \text{ de passage au quotient}$$

(détail voir p. 5)

III) Applications Holomorphes et méromorphes

définition: Si X et X' sont deux surfaces de Riemann, une application continue $f: X \rightarrow X'$ est dite Holomorphe si pour chaque carte φ de X et φ' de X'



(f est holomorphe dans des cartes holomorphes est holomorphe)

Dans le cas où la surface de Riemann X' est $\mathbb{C}$, on parle de fonction holomorphe.

Dans ce cas on peut définir les fonctions méromorphes

Rappel: toute application holomorphe $f: \Delta^* \rightarrow \mathbb{C}$

$$(\Delta^* = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, z \neq 0\})$$

qui est bornée se prolonge en une application holomorphe de Δ

On en déduit que les fonctions méromorphes $f: X \rightarrow \mathbb{C}$

correspondent aux applications holomorphes $f: X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$

Théorème de structure locale des applications holomorphes entre surfaces de Riemann

Soit $f: X \rightarrow Y$ une application holomorphe non constante

entre surfaces de Riemann

Soit $x_0 \in X$ et $y_0 = f(x_0)$. Alors, il existe un entier naturel m et il existe des cartes holomorphes φ au voisinage de x_0 et ψ au voisinage de y_0 telles que

$$\begin{array}{ccc} U_{x_0} & \xrightarrow{f} & U_{y_0} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ V_{x_0} \subset \mathbb{C} & \xrightarrow{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}} & V_{y_0} \subset \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^m \end{array}$$

Dém: On choisit des cartes φ_0 centrée en x_0 et ψ_0 centrée en y_0 .
 $\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}$ est une fonction holomorphe non constante entre ouvert de $\mathbb{C}$ qui envoie 0 sur 0.

Pour une coordonnée w sur $\mathbb{C}$, cette fonction s'écrit
 $\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}(w) = w^m R(w)$ où $m \in \mathbb{N}^*$ et R est application holomorphe telle que $R(0) \neq 0$.

Quitte à restreindre les ouverts $R(w)$ s'écrit comme
 $R(w) = (g(w))^m$

$$\text{ainsi } \psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}(w) = (w g(w))^m$$

d'application $w \mapsto w g(w)$ est un bi-holomorphisme local au voisinage de 0 car $g(0) \neq 0$.

$\psi = \psi_0 \circ \varphi_0$ est une nouvelle carte centrée en x_0 .

$z = w g(w)$ est une nouvelle coordonnée sur un voisinage de 0 dans

$$\begin{aligned} \psi_0 \circ f \circ \psi^{-1}(z) &= \psi_0 \circ f \circ (\psi_0 \circ \varphi_0)^{-1}(w g(w)) = \psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1} \circ \varphi_0 \circ \psi^{-1}(w g(w)) \\ &= (\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1})(w) = (w g(w))^m \\ &= z^m \end{aligned}$$

Conséquences géométriques:

Les applications holomorphes non constantes entre surface de Riemann sont ouvertes.

$$(\text{c'est le cas pour } \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^m \end{array})$$

Si de plus X est compacte, $f(X)$ est ouverte et compacte donc fermée.
 C'est donc une composante connexe compacte de l'ensemble d'arrivée.
 En particulier, les fonctions holomorphes sur X compacte sont constantes.
 (on s'intéressera donc aux fonctions méromorphes sur les surfaces de Riemann compactes)

Principe du maximum:

Si X est une surface de Riemann et $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante, alors $|f|$ n'atteint pas son maximum.

Dém: Par l'absurde

si $\sup |f| = |f(x_0)| = M$ pour $x_0 \in X$
 $f(X) \subset \overline{B(0, M)}$

Comme $f(X)$ est ouverte, on devrait avoir $f(X) \subset B(0, M)$.
 contredit $f(x_0) \in \partial B(0, M)$

Topologie algébrique: Masser
 Goddard

19/09

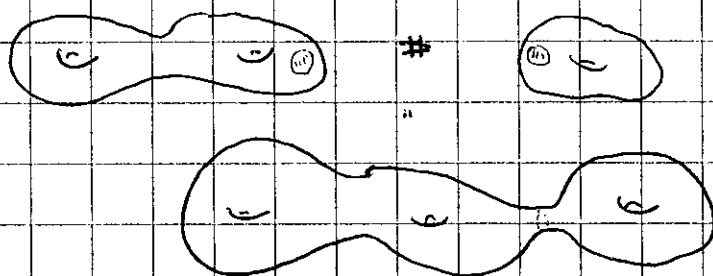
Chap II

Topologie des surfaces différentiables

I.] Classification

Théorème : Toute surface topologique orientable compacte (connexe séparée) est homéomorphe à une sphère ou à une somme connexe de tores.
Le nombre de tores est appelé genre de la surface.

Somme connexe



II.] Le groupe fondamental $\pi_1(S)$

$\pi_0(S)$ l'ensemble des composantes connexes par arc de S

Le groupe fondamental $\pi_1(S, x_0)$, x_0 est un point fixé sur S
est le groupe des classes d'homotopie de lacets basés en x_0
et basés sur S , avec la loi de composition naturelle.

définition : Une homotopie (à extrémités fixes) entre deux chemins γ_0 et γ_1 est une application continue
de même extrémités x_0 et x_1
 $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S$
 $(t, \tau) \mapsto H(t, \tau) = \gamma_\tau(t)$

tel que

$$\begin{aligned} & \forall \tau \in [0, 1] \quad H_\tau(0) = x_0 \\ & \quad \quad \quad H_\tau(1) = x_1 \\ & \cdot \quad H_0(t) = \gamma_0(t) \quad \forall t \in [0, 1] \\ & \quad \quad H_1(t) = \gamma_1(t) \quad \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

S'il existe une homotopie entre γ_0 et γ_1 alors $\gamma_0 \sim \gamma_1$ est le bord d'un disque tracé sur la surface

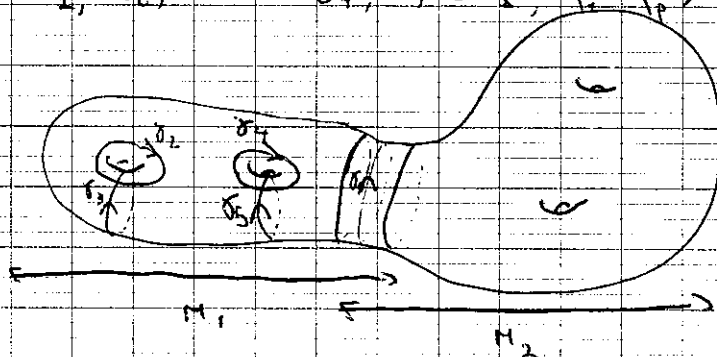
Théorème (Seifert - Van Kampen).

Soit M un espace topologique connexe par arc

Si M est réunion de deux ouverts M_1 et M_2 et si $M_1 \cap M_2$ est aussi connexe par arc alors pour $x_0 \in M_1 \cap M_2$

$$\pi_1(M_1, x_0) = \langle \underbrace{\delta_1, \dots, \delta_p}_{\text{générateurs}}, \underbrace{\eta_1, \dots, \eta_q}_{\text{relations}} \rangle$$

$$\pi_1(M_2, x_0) = \langle \delta_1, \dots, \delta_s, \rho_1, \dots, \rho_r \rangle$$



i_1 l'inclusion de $M_1 \cap M_2$ dans M_1

i_2 " " " dans M_2

Si $\pi_1(M_1 \cap M_2)$ est engendré par $\eta_1, \dots, \eta_m$

$$i_1(\eta_j) = \eta_j^1 \quad i_2(\eta_j) = \eta_j^2 \quad \text{écrit en termes des } \delta_k$$

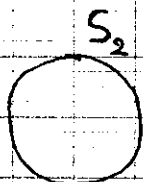
écrit en termes de générateurs δ_k

Alors le groupe fondamental $\pi_1(M, x_0)$ de la réunion $M = M_1 \cup M_2$

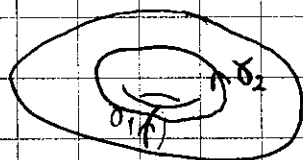
a pour présentation

$$\pi_1(M, x_0) = \left\langle \begin{array}{l} \delta_1, \dots, \delta_p \\ \delta_1, \dots, \delta_s \end{array} \middle/ \begin{array}{l} \eta_1, \dots, \eta_m \\ \rho_1, \dots, \rho_r \\ \eta_j^{-1} (\eta_j^2)^{-1} \end{array} \right\rangle$$

Exemple



est simplement connexe $\pi_1(S^2, x_0) = \{1\}$



$$\pi_1(T, x_0) = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = e \rangle \cong \mathbb{Z}^2$$

Corollaire: Le groupe fondamental d'une surface orientable compacte a une présentation de la forme

$$\pi_1(S, x_0) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = e \rangle$$

$2g$ générateurs 1 relation
 $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$

III) Revêtements

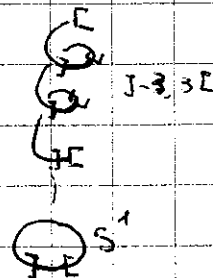
définition: Un revêtement d'un espace topologique X est la donnée d'un espace topologique X' et d'une application

$p: X' \rightarrow X$ telle que tout x de X a un voisinage ouvert U tel que chaque composante connexe par arc de $p^{-1}(U)$ est homéomorphe à U par p .

Exemple: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (x, y) $\downarrow$ $\downarrow$ $\mathbb{R}$ x n'est pas un revêtement.

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\downarrow$ $\downarrow$ $S^1 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un revêtement

$[0, 3[\rightarrow \mathbb{R}$ $\downarrow$ $\downarrow$ $S^1 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ n'est pas un revêtement



Il y a des compacts de S^1 dont l'image réciproque n'est pas compacte (cette application n'est pas propre).

En particulier, p est un homéomorphisme local (ie tout point x' de X' a un voisinage U' sur lequel $p: U' \rightarrow p(U')$ est un homéomorphisme)

Proposition (Relèvement de chemins)

Soit $p: X' \rightarrow X$ un revêtement, $x_0 \in X$ et γ un chemin de X d'origine x_0 .

Alors pour chaque point x'_0 d'antécédent de x_0 par p il existe un unique chemin γ' tracé sur X' d'origine x'_0 tel que $p \circ \gamma' = \gamma$

Remarque Si γ est un lacet, son relèvement γ' n'est qu'un chemin en général

Proposition (Relèvement des homotopies)

Soit $p: X' \rightarrow X$ un revêtement

$H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ une homotopie (à extrémités fixées) entre deux chemins basés en $x_0 \in X$

Alors, H admet un unique relèvement $H': [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X'$ en une homotopie (à extrémités fixées) entre deux chemins basés en x'_0

$$\begin{array}{ccc} H' & \xrightarrow{\quad} & (X', x'_0) \\ & \searrow p & \downarrow p \\ [0, 1] \times [0, 1] & \xrightarrow{\quad} & (X, x_0) \\ & H & \end{array} \quad p \circ H' = H$$

Noter qu'alors $\gamma'_0(1) = \gamma'_1(1)$

En particulier $p_*: \pi_1(X', x'_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$

$$\gamma' \mapsto p \circ \gamma'$$

est bien définie et est injective

L'image de p_* est appelé sous groupe définissant le revêtement p

Théorème 1) Il existe une bijection entre les classes de conjugaison de sous groupes de $\pi_1(X, x_0)$ et les classes d'équivalence de revêtement connexes par arcs de X

2) Le groupe des transformations de revêtement de $p: X' \rightarrow X$ est isomorphe au quotient $\frac{\text{Normalisateur} (p_* (\pi_1(X', x'_0)))}{\pi_1(X, x_0)}$

3) Le revêtement universel de X est défini par le sous groupe $\{1\}$ de $\pi_1(X, x_0)$. Son groupe de transformation est isomorphe à $\pi_1(X, x_0)$

Définition • Un isomorphisme de revêtements entre $p: X' \rightarrow X$ et $q: X'' \rightarrow X$

est un homéomorphisme $R: X' \rightarrow X''$ tel que

$$X' \xrightarrow{R} X''$$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow p & \downarrow q \\ & X & \end{array}$$

$$q \circ R = p$$

(en particulier, R respecte les fibres de p)

• Si de plus $X'' = X'$, on dit que R est une transformation du revêtement

• Le normalisateur d'un sous groupe H dans un groupe G est

$$N_G(H) = \{ g \in G \mid g H g^{-1} = H \}$$

En particulier, si H est distingué dans G $N_G(H) = G$

IV) Revêtements et applications holomorphes

Lemme: Si $p: X' \rightarrow X$ est un revêtement entre deux espaces topologiques, alors pour toute structure de Riemann sur X il existe une unique structure de surface de Riemann sur X' telle que p soit une application holomorphe.

En particulier, le revêtement universel d'une surface de

Riemann peut être muni d'une structure de surface de Riemann comme
Les transformations de revêtement sont alors holomorphes.

Il suffit donc pour comprendre la structure des surfaces de Riemann
de comprendre les surfaces de Riemann simplement connexes et
les sous-groupes de leur groupe d'automorphismes (G-holomorphismes)

Démonstration: Soit $U \subset X$ un ouvert de X , de centre $(\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{C})$
qui réalise le revêtement universel $p: \tilde{X} \rightarrow X$ ($p^{-1}(U)$ est
réunion disjointe de composantes connexes isomorphes par p à U)

Soit $\tilde{U}$ une composante de $p^{-1}(U)$

$$\text{On choisit le centre } \tilde{U} \xrightarrow[p_{\text{Riem}}]{p} U \xrightarrow[p_{\text{Riem}}]{\varphi} V \subset \mathbb{C}$$

On obtient alors un atlas de $\tilde{X}$

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{U} \cap \tilde{U}_0 & \\ & \swarrow \downarrow \searrow & \\ p & & p \\ \varphi \swarrow & U \cap U_0 \subset U_0 & \searrow \varphi_0 \\ V & \xrightarrow{\text{Bk. sur les intersections}} & V_0 \end{array}$$

Pour p universel, si $p: \tilde{X} \rightarrow X$ est holomorphe alors $\varphi \circ p$ est
nécessairement une carte compatible

24/09

II] Actions de groupes

Soit X une surface de Riemann et G un groupe

On dit que G agit par G-holomorphisme sur X

si l'action $G \times X \rightarrow X$ est telle que

$$\forall g \in G \quad p_g: X \rightarrow X \quad \text{soit un G-holomorphisme}$$

$$x \mapsto g \cdot x$$

On dit que G agit fidèlement si les p_g ($g \neq e_G$)

n'ont pas de points fixes

On dit que G agit proprement discontinuement si $\forall K$ compact de X il n'y a qu'un nombre fini de $g \in G$ tels que $(g \cdot K) \cap K \neq \emptyset$

Exemple: "L'action" de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{C}$

On choisit τ un nombre complexe de partie imaginaire strictement positive. $(\mathbb{Z}^2, +) \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$(a, g), z \mapsto (a + g\tau) + z.$$

est une action sans point fixe, proprement discontinue, holomorphe

Le quotient est un tore complexe (surface de Riemann de genre 1).

Propriétés: 1) Si l'action est libre et proprement discontinue alors tout $x \in X$ a un voisinage ouvert $V_x \subset X$

tel que $\forall g \neq e, gV_x \cap V_x = \emptyset$

2) L'ensemble quotient X/G muni de la topologie quotient (la topologie la plus fine telle que $p: X \rightarrow X/G$ soit continue) est séparé si l'action est libre et proprement discontinue

3) L'application $p: X \rightarrow X/G$ est alors un revêtement et le quotient admet une unique structure de surfaces de Riemann telle que p soit holomorphe

démonstration: 1) On prend $x \in X$ et U_x un voisinage relativement compact de x dans X

Il n'existe qu'un nombre fini de $(g_i) \in G$ tels que $g_i \bar{U}_x \cap \bar{U}_x \neq \emptyset$

On prend des voisinages V_i d'adhérence dense à deux disjointes des $g_i \cdot x$

$$g_i \cdot x = g_j \cdot x \quad (g_i^{-1} \cdot g_j) \cdot x = x$$

comme l'action est libre

$$g_i = g_j$$

↓

$V_x = \bigcap_{g \in G} g^{-1} V_1$ est un voisinage ouvert de x tel que
 $\forall g \in G \quad g V_x \cap V_x = \emptyset$

2) Il s'agit de montrer que si x et x' sont deux points qui ne sont pas dans la même orbite sous G , alors $\exists V_x$ voisinage de x et $V_{x'}$ voisinage de x' tels que $\forall g \in G \quad g V_x \cap V_{x'} = \emptyset$
 $\forall h \in G$

3) Soit $x \in X$ et U un ouvert de carte tel que

les gU soient deux à deux disjoints.

Soit $V = p(U)$ $p: X \rightarrow X/G$

$p: U \rightarrow V$ est un homéomorphisme (surjective continue).

$(y, z) \in U^2$ si $p(y) = p(z)$ $\exists (g, g') \in G^2$ $g y = g' z$

soit $(g')^{-1} g: y = z \in U \cap (g')^{-1} g U$

donc $g' = g$ ainsi $y = z$

p est injective.

On munit alors V de la carte

$V \xrightarrow{p^{-1}} U \xrightarrow[\text{carte}]{\varphi} U \subset \mathbb{R}^n$

donne un atlas sur X/G X/G est une surface de Riemann

Reste à voir que $p: X \rightarrow X/G$ est un revêtement

Soit $z \in X$, $z \in p^{-1}(V) \Leftrightarrow \exists x' \in U / p(x') = p(z)$

$\Leftrightarrow \exists x' \in U, \exists g \in G / z = g x'$

$p^{-1}(V) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$ est une partition en ouverts homéomorphes à V par p #

Remarque: (Exemple fondamental)

Soit X une surface de Riemann compacte

$\tilde{X}$ son revêtement universel (c'est une surface de Riemann simplement connexe)

$x_0 \in X$, $\pi_1(X, x_0)$ agit sur $\tilde{X}$ par homéomorphismes, par

une action P.Gr. et proprement discontinue.

Le quotient $\tilde{X}/G$ est isomorphe à X en tant que surface de Riemann.

$$\pi_1(X, x_0) \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$$

$$(\gamma, x'_0) \mapsto \tilde{\gamma}(1)$$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\gamma} & \nearrow & \tilde{X}, x'_0 \\ & \gamma & \downarrow p \\ [0, 1] & \xrightarrow{\gamma} & X, x_0 \end{array}$$

On relève γ en un chemin $\tilde{\gamma}$ d'origine x'_0 .

Si $\gamma \cdot x'_0 = x'_0$

$$\tilde{\gamma}(1) = x'_0 = \tilde{\gamma}(0)$$

$\tilde{\gamma}$ est en fait dans $\tilde{X}$ simplement connexe

$$e = [\tilde{\gamma}] \in \pi_1(\tilde{X}, x_0)$$

$$[\gamma] = p_* [\tilde{\gamma}] = e \in \pi_1(X, x_0)$$

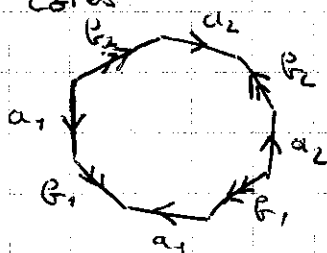
donc l'action est P.Gr.

VI) Homologie

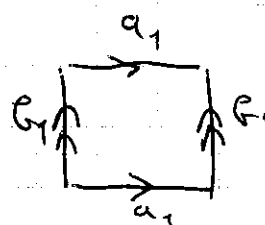
Autre version du théorème de classification des surfaces topologiques orientables compactes.

Toute surface topologique orientable compacte admet une forme normale obtenue en identifiant les côtés d'un polygone

à $4g$ côtés



$g=2$



$g=1$

Les $2g$ côtés redonnent les générateurs du groupe fondamental

On retrouve la relation $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$ (le disque est nul dans $\pi_1(X)$)

On peut trouver une triangulation de la surface M telle que l'homologie simpliciale soit engendrée en degré 1 par les Pacets a_i et b_j .

On peut définir la caractéristique d'Euler de la surface M compacte.

$$\chi(M) = \text{nombre de triangle} - \text{nb de côtés} + \text{nb de sommets}$$

Cette quantité est indépendante du choix de la triangulation. Elle est en fait même indépendante de la partition en polygones.

pour $g=1$:

face	côtés	sommets	
1	- 2	+ 1	= 0

$$\chi(T^1) = 0.$$

$$\chi(T^g) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g.$$

(cf Massey p. 33)

On a étudié la forme locale des applications holomorphes non constantes en surface de Riemann (modèle local $z \mapsto z^m$, m multiplicité)

Soit $f: X \rightarrow Y$ une application holomorphe non constante entre surfaces de Riemann connexes compactes.

Il existe un ensemble fini de points (x_i) dans X en dehors desquels la multiplicité vaut 1.

(Les points de multiplicité $m > 1$ sont isolés.)

$$\text{Alors } \underline{f}: X - \{f(x_i)\} \rightarrow Y - \{f(x_i)\}$$

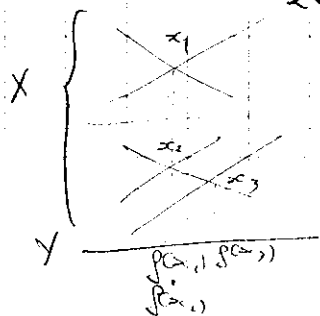
est un isomorphisme local, propre

C'est donc un revêtement.

On appelle degré de l'application f , le nombre de point d'une fibre de ce revêtement.

Par la forme locale de f

$$\forall y \in Y \quad \sum_{x \in f^{-1}(y)} m(x) = \deg f$$



On considère une triangulation de X telle que tous les points singuliers x_i soient des sommets adaptés à une triangulation de Y

$$\chi(X) = \deg(p) \times \text{nb de faces de la triangulation sur } Y$$

$$- \deg(p) \times \text{nb de cotés de la triangulation sur } Y$$

$$+ \deg(p) \times \text{nb de sommets de la triangulation sur } Y$$

$$- \sum_{x_i \text{ singulier}} (m(x_i) - 1)$$

Formule de Poincaré-Hurwitz $\left\{ \begin{array}{l} \text{d'où } \chi(X) = \deg(p) \chi(Y) - \sum_{x \text{ singulier}} (m(x) - 1) \end{array} \right.$

Hurwitz

$$2 - 2g(X) = \deg(p) (2 - 2g(Y)) - \sum_{x \text{ singulier}} (m(x) - 1)$$

En particulier $g(X) \geq g(Y)$ (contrainte topologique à l'existence d'une application holomorphe de $X \rightarrow Y$ non constante)

Chap III

Formes différentielles, intégration

I] Formes différentielles

Une forme différentielle de degré 1 sur une variété différentiable M^2 est la donnée d'une forme linéaire sur chaque espace tangent $T_m M, m \in M$ dont les coefficients (pas dans chaque carte) dépendent de façon C^∞ du point m .

Donc chaque ouvert de carte

$$M \supset U$$

$$\varphi \downarrow$$

$$\mathbb{R}^2 \supset V \xrightarrow{f} (\mathbb{R}^2)^*$$

$$(x, y) \mapsto a(x, y) dx + b(x, y) dy, \quad a \text{ et } b \text{ sont de classe } C^\infty$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (U, m) & & \\
 & \swarrow \varphi_1 & & \searrow \varphi_2 & \\
 (\mathbb{R}^2)^* & \xleftarrow{f_1} & (V_1, x_1) & \xrightarrow{f_2} & (V_2, x_2) \xrightarrow{f_2} (\mathbb{R}^2)^* \\
 & & \varphi_{21} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} & &
 \end{array}$$

Un vecteur tangent à M en un point $m \in U \subset M$ se représente dans TV_1 par un vecteur X_1 .

dans TV_2

X_2

X_1 et X_2 étant reliés par $X_2 = d\varphi_{21}(x_1) \cdot X_1$

IP: prouver que $\forall X_1 \in TV_1$

$$\begin{aligned}
 f_1(\varphi_1(p)) \cdot X_1 &= f_2(\varphi_2(p)) \cdot X_2 \\
 &= f_2(\varphi_2(p)) \cdot d\varphi_{21}(x_1) \cdot X_1
 \end{aligned}$$

$$f_1(\varphi_1(p)) = f_2(\varphi_2(p)) \cdot d\varphi_{21}(x_1)$$

$$\text{Si } f_1(x_1, y_1) = a_1(x_1, y_1) dx_1 + b_1(x_1, y_1) dy_1$$

$$f_2(x_2, y_2) = \dots$$

$$\varphi_{21}: V_1 \rightarrow V_2 \subset \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, y_1) \mapsto (\varphi_x(x_1, y_1), \varphi_y(x_1, y_1))$$

$d\varphi_1$ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

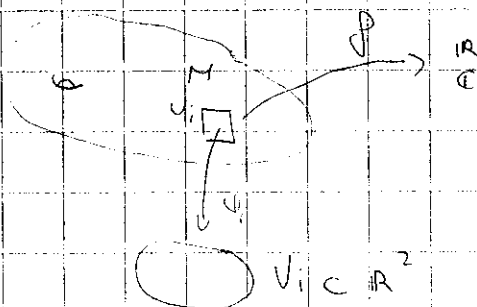
26/09

Exemple de 1-formes différentielles

Soit $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ sur M surface différentiable.
On définit df par la donnée sur chaque carte U ,

$$d(f \circ \varphi_i^{-1})$$

On peut vérifier les compatibilités
(différentielle d'une composée)



Les 1-formes de ce type sont dites exactes.

L'intégrale d'une 1-forme différentielle $\int_{\gamma} a_1(x, y) dx + b_1(x, y) dy$
le long d'un chemin continu et différentiable par morceaux
 $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$

$$t \mapsto (x(t), y(t)) (= \varphi_i \circ \gamma(t))$$

Contenu dans l'ouvert de carte U est

$$\int_{\gamma} f = \int_0^1 [a_1(x(t), y(t)) x'(t) + b_1(x(t), y(t)) y'(t)] dt$$

On peut vérifier que si γ est contenu dans deux ouverts
de carte U et U' la quantité

$$\int_{\gamma \subset U} f = \int_{\gamma \subset U'} f \quad \text{ne dépend pas de la carte choisie}$$

On peut alors définir $\int_{\gamma} f$ même si γ n'est pas inclus
dans un ouvert de carte

Une 2-forme différentielle Ω sur M est la donnée sur chaque espace tangent $T_m M$ d'une 2-forme différentielle bilinéaire anti-symétrique dont les coefficients dépendent de façon

En coordonnées $\Omega \approx \sum p_i(x, y) dx_i \wedge dy_i$

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ \phi_1 \swarrow & & \searrow \phi_2 \\ V_1 & \xrightarrow{\psi = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}} & V_2 \end{array}$$

$$p_1(\phi_1(m)) = p_2(\phi_2(m)) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_x}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_y}{\partial y_1} \end{pmatrix}$$

Si M est une surface de Riemann

ψ est un biholomorphisme d'ouverts de $\mathbb{C}$

z_1 coordonnées sur V_1 $z_2 = x_2 + i y_2$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} - i \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \right)$$

$$d\psi \text{ est } \mathbb{C} \text{-linéaire} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + i \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \right) = 0 \quad \text{ie} \quad \frac{\partial \psi_x}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y_1} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + i \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \right) = 0 \quad \text{ie} \quad \frac{\partial \psi_x}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y_1} = 0$$

$$\det \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 4 \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|^2 > 0$$

On peut choisir de manière cohérente des bases "directes" du fibré T^*M . En particulier une surface de Riemann orientable.

Structure presque-complexe sur TS_R

La structure de surface de Riemann permet de munir le fibré tangent d'une structure de fibré en droites complexes. On définit en chaque point $s \in S$ un opérateur $\mathbb{R}$ -linéaire J_{geom} tel que $J_{\text{geom}} \circ J_{\text{geom}} = -\text{Id}_{TS}$ ($i^2 = -1$)

Dans la carte



z coordonnées sur V $z = x + iy$

$$J_{\text{geom}} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{rotation d'angle } \frac{\pi}{2})$$

$$J_{\text{geom}} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ Base du fibre tangent

$$\mathbb{C} \supset V_1 \xrightarrow{\Psi} V_2 \subset \mathbb{C}$$

On vérifie que $d\Psi \circ J_{\text{geom}}^1 = J_{\text{geom}}^2 \circ d\Psi$
car Ψ un $\mathbb{C}$ -isomorphisme

donc J_{geom} est bien définie sur TS

Γ

$$\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \text{ est un repère local pour } TS_{\mathbb{C}}$$

$$\text{car } J_{\text{geom}} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} + i \frac{\partial}{\partial x} \right) = i \frac{\partial}{\partial z} \quad \checkmark$$

J_{geom} est $\mathbb{R}$ -linéaire sur $TS_{\mathbb{R}}$ et $J^2 = -Id$

On étend J_{geom} en $J_{\text{geom}}^{\mathbb{C}}$ qui devient $\mathbb{C}$ -linéaire sur $TS_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$
(car complexe de dimension 2)

$$\left. \begin{aligned} J_{\text{geom}}^{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \\ J_{\text{geom}}^{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{matrice non diagonale.} \\ &\Rightarrow \text{recherche de vecteurs propres} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} J_{\text{geom}}^{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial z} &= i \frac{\partial}{\partial z} \\ J_{\text{geom}}^{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= -i \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\Rightarrow \text{on a les vecteurs propres} \\ &\text{de } J_{\text{geom}}^{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

$TS_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = E_+ \oplus E_-$ somme d'espace propre

IP a un isomorphisme de $\mathbb{C}$ en entre

$$(TS_{\mathbb{R}}, J_{\text{geom}}) \cong (E_+, i_x = J_{\text{geom}}^{\mathbb{C}})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &\mapsto \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} &\mapsto i \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

action du groupe complexe

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times TS_{\mathbb{R}} &\rightarrow TS_{\mathbb{C}} \\ (a, v) &\mapsto a + i v \end{aligned}$$

ce qui revient à $I_{geom} = -Id$

On note $T^{1,0}S \subset E$, $T^{0,1}S \subset E$

Sur les espaces de 1-formes différentielles

Localement une 1-forme différentielle à valeurs réelles
(resp. complexes) est donnée par
 $f \simeq a dx + b dy$ a, b fonction C^∞ à valeurs réelles
(resp. complexes)

dx, dy formes $\mathbb{R}$ -linéaires à valeurs réelles

$$dx \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = 1 \quad dx \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) = 0 \quad TS_{\mathbb{R}}$$

On définit $dz = dx + i dy$ formes $\mathbb{R}$ -linéaires à valeurs complexes
 $d\bar{z} = dx - i dy$ formes $\mathbb{R}$ -linéaires à valeurs complexes $TS_{\mathbb{C}}$

$$dz \circ I_{geom} = i dz$$

dz et I_{geom} - linéaire

$$d\bar{z} \circ I_{geom} = -i d\bar{z}$$

$d\bar{z}$ et I_{geom} - anti-linéaire

$$TS_{\mathbb{C}}^* \otimes \mathbb{C} = \underbrace{T^{1,0}S^*}_{\text{espace propre pour } I_{geom} \text{ de } vp=1} \oplus \underbrace{T^{0,1}S^*}_{\text{engendré par } d\bar{z}}$$

Une 1-forme différentielle à valeurs complexes dont l'écriture locale est $f \simeq a(x, y) dz$ est dite de type $(1, 0)$
 $a(x, y)$ fonction C^∞ à valeurs complexes

Différentielle extérieure (M surfaces différentiables)

- Sur les fonctions (déjà définie dans l'exemple de 1-formes exactes)
 $f \simeq f_0 \circ \varphi^{-1} = \tilde{f}$

$$df \approx \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

- sur les 1-formes

$$\omega \approx a(x, y) dx + b(x, y) dy$$

$$d\omega \approx \left(-\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x} \right) dx \wedge dy, \text{ ne dépend pas de la}$$

carte différentiable choisie
définit une 2-forme différentielle

- sur les 2-formes

$$d\Omega = 0$$

On vérifie $d \circ d = 0$

Définitions : • On dit qu'une forme différentielle F est ferme (d-ferme)

$$\text{si } dF = 0$$

• On dit qu'une forme différentielle F est d-exacte

si il existe une forme différentielle G telle que $F = dG$

• Les formes d-exactes sont d-fermées

• On définit les espaces de cohomologie de De Rham

$$\text{comme les quotients } H_{DR}^k(M, \mathbb{R}) = \frac{\{\text{formes diff de degré } k \text{ d-fermées}\}}{\{\text{d-exactes}\}}$$

Différentielle Holomorphe (S surface de Riemann)

- Soit les fonctions à valeurs complexes

$$f = \bar{f} \quad \bar{\partial} f \approx \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \quad (\text{f est holomorphe si } \bar{\partial} f = 0)$$

- sur les 1-formes

$$\omega \approx a(z, \bar{z}) dz + b(z, \bar{z}) d\bar{z} \quad \bar{\partial} \omega \approx \frac{\partial a}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz$$

- sur les 2-formes

$$\bar{\partial} \Omega = 0$$

On calcule $\bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0$. (cohomologie de Dolbeault)

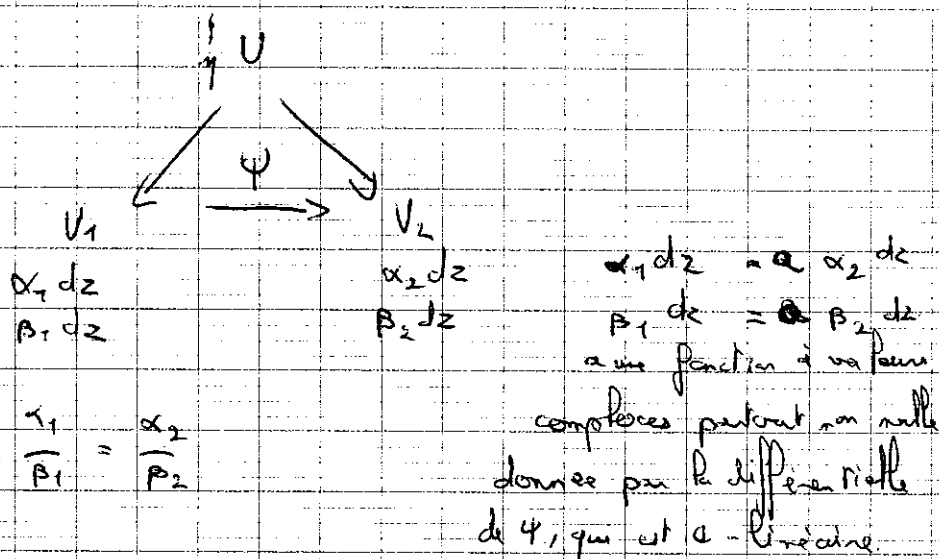
On peut aussi définir un opérateur $\bar{\partial}$ tel que $d = \partial + \bar{\partial}$
 Comme $d^2 = 0$ et $\bar{\partial}^2 = 0$: $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$.

Definition Une forme du type $(1, 0)$ est dite 1-forme holomorphe
 si $\bar{\partial}f = 0$.

Alors $\int_U \alpha(z, \bar{z}) dz$ où α est une fonction holomorphe.

Lemme : Le "quotient" de deux 1-formes holomorphes fournit une fonction méromorphe sur la surface de Riemann S .

Dém $\int_U \alpha(z, \bar{z}) dz$ $\eta = \int_U \beta(z, \bar{z}) dz$
 La donnée sur les ouvert de carte de $\frac{\alpha}{\beta}$ se recollent
 en une fonction méromorphe.



01/10

1-Formes harmoniques

Si sur un ouvert U étoilé de $\mathbb{R}^2$ on a une 1-forme différentiable à valeurs réelles $f = a(x, y) dx + b(x, y) dy$ avec $a, b \in C^1(U, \mathbb{R})$

$$df = \left(-\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x} \right) dx \wedge dy$$

Si f est fermée, $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$ (1), alors il existe une fonction

$f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ telle que $a(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $b(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$$(*) \text{ correspond à } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

dans ce cas $\gamma = df$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = d\gamma^* \text{ où } \gamma^* \text{ est la forme donnée par}$$

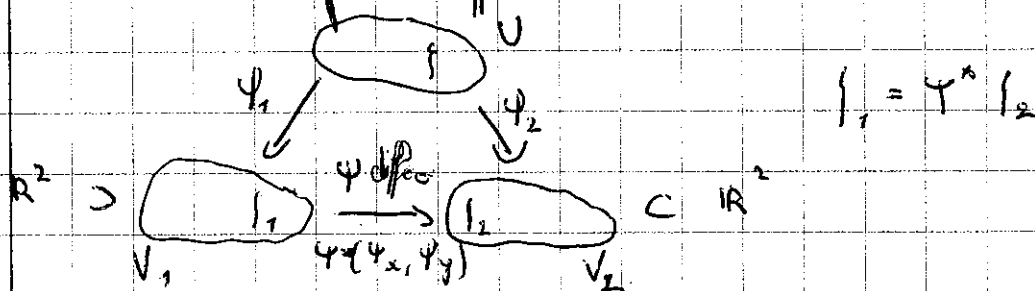
$$\gamma^* = -b(x, y) dx + a(x, y) dy$$

Pour vérifier que f est harmonique (ie $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$)
il suffit de vérifier que γ^* est fermée

definition Sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, si $\gamma = a dx + b dy$ est une 1-forme différentielle, on définit $\gamma^* = -b dx + a dy$
(forme conjuguée)

On dit que γ est harmonique si $d\gamma = 0$ et $d\gamma^* = 0$

Remarque Cela signifie que localement γ est la différentielle d'une fonction harmonique.
Sur une surface différentielle



$$\gamma_2 = a_2(x_2, y_2) dx_2 + b_2(x_2, y_2) dy_2$$

$$\gamma_1 = \psi_1^* \gamma_2$$

$$= a_2(\psi_{1x}(x_1, y_1), \psi_{1y}(x_1, y_1)) \left(\frac{\partial \psi_{1x}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi_{1x}}{\partial y_1} dy_1 \right) + b_2(\psi_{1x}(x_1, y_1), \psi_{1y}(x_1, y_1)) \left(\frac{\partial \psi_{1y}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi_{1y}}{\partial y_1} dy_1 \right)$$

$$\varphi^* \int_2 = \left[a_2(\varphi) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + G_2(\varphi) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \right] dx_1 \\ + \left[a_2(\varphi) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} + G_2(\varphi) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} \right] dy_1$$

$$\int_2^* = -G_2(x_2, y_2) dx_2 + a_2 dy_2$$

$$\varphi^* \int_1^* = \left[-G_2(\varphi) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + a_2(\varphi) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \right] dx_1 \\ + \left[-G_2(\varphi) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} + a_2(\varphi) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} \right] dy_1$$

$$\int_1^* = \left[-a_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} - G_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} \right] dx_1 + \left[a_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + G_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \right] dy_1$$

Pour que l'opération α soit bien définie, il faut que :

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} = \beta$$

on obtient les équations de Cauchy-Riemann $\Rightarrow \varphi$ holomorphe

$$\text{ie } M(d\varphi, \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}\right), \left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_2}\right)) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$d\varphi$ est $\mathbb{C}$ -linéaire

$$J \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$J \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}$$

Conclusion : L'opération α est bien définie sur les surfaces de Riemann (et non sur les surfaces différentiables en général).

proposition : Si f est une 1-forme différentiable Riemannienne sur une surface de Riemann X , alors $f + i f^*$ est une 1-forme holomorphe sur X .

Démonstration : Localement (sur un petit ouvert holomorphe à une boule, en particulier étoilé).

$$\begin{aligned} \text{\textit{f} est exacte : } f &= df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad f \in C^\infty(U, \mathbb{R}) \\ f^* &= -\frac{\partial f}{\partial y} dx + \frac{\partial f}{\partial x} dy \end{aligned}$$

Comme f est supposé harmonique, $df^* = 0$, ie f^* est exacte.
 d'où il existe $g \in C^\infty$

$$\text{telle que } f^* = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy$$

On pose $R = f + ig$

$$dR = df + idg = f^* + if^* = 0$$

Il reste à montrer que dR est holomorphe.

$$\frac{\partial R}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial R}{\partial x} + i \frac{\partial R}{\partial y} \right) = \dots = 0$$

donc $f + if^*$ est une 1-forme holomorphe.

$f + if^*$ est localement la différentielle d'une fonction holomorphe (R dépend de U).

Chap IV

Théorie des fonctions sur une surface de Riemann

I, Masse de Dirichlet

Si f est une 1-forme différentiable sur une surface de Riemann X ,

$$\text{on pose } D(f) := \int_X |f|^2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

Rappel Par la formule de changement de variable

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ un difféomorphisme

$$\int_U \alpha(\varphi(x, y)) J_{\varphi} dx dy = \int_{\varphi(U)} \alpha(x, y) dx dy$$

$$\int_U \varphi^* \Omega = \int_{\varphi(U)} \Omega \quad \Omega \text{ 2-forme}$$

En particulier, si (φ_i) est une partition de l'unité sur X dont les supports sont dans des ouverts de cartes, on pose:

$$\int_X \Omega = \sum \int_X \varphi_i \Omega = \sum \underbrace{\int_{U_i} \varphi_i \Omega}_{\text{se calcule comme dans } \mathbb{R}^2}$$

Cette définition ne dépend pas du choix des cartes et des φ_i .

Sur une carte U_i , $f = a_i dx_i + b_i dy_i$

$$\begin{aligned} \text{d'où } |f|^2 &= (a_i dx_i + b_i dy_i) \wedge (-b_i dx_i + a_i dy_i) \\ &= (a_i^2 + b_i^2) (dx_i \wedge dy_i) \end{aligned}$$

La masse de Dirichlet est donc bien définie:

définition La masse de Dirichlet d'une fonction $f \in C^\infty$ sur X , surface de Riemann est:

$$\begin{aligned} D(u) &:= D(du) = \int_X du \wedge (du)^* \stackrel{\text{après}}{=} \int_X \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ &= \int_X \left(\frac{1}{x^2} \left| \frac{\partial u}{\partial \theta} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 \right) r dr d\theta \end{aligned}$$

II) Fonctions Harmoniques sur le disque unité.

Soit $a > 0$, $\Delta_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < a\}$, $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}_1$.

définition : On dira qu'une fonction numérique f sur $\bar{\Delta}$ est admissible sur $\bar{\Delta}$ si elle est continue sur $\bar{\Delta}$, continuellement différentiable sur Δ , et de masse de Dirichlet finie i.e. $\lim_{a \rightarrow 1} \int_{\Delta_a} df \wedge (df)^*$ existe dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1 : Si u est admissible sur $\bar{\Delta}$ et harmonique sur Δ alors pour tout $z \in \Delta$, $z = re^{i\varphi}$

$$u(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)} v(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}$$

où $v \in C^0(\partial\Delta)$ est l'application qui donne les valeurs au bord de u $v(\theta) = u(e^{i\theta})$.

2. Réciproquement, si v est une fonction continue sur $\partial\Delta$, alors la formule $u(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)} v(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} (*)$ avec $z = re^{i\varphi}$

définit une fonction harmonique sur Δ dont les valeurs au bord sont données par v .

3. Si u' est une fonction admissible sur $\bar{\Delta}$ de valeurs au bord données par v alors la fonction harmonique u précédente (donnée par $(*)$) a une masse de Dirichlet $D(u)$ inférieure à $D(u')$. En fait on a $D(u') = D(u) + D(u' - u)$.

démonstration : On montre que si u est harmonique (par la formule de Stokes)

$$u(z) = \int_{\partial\Delta} u(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$$

On déduit 1. en utilisant le Möbiotransformation

$$z \xrightarrow{\psi} \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z} \quad (\text{qui envoie } 0 \text{ sur } z_0) \quad (\text{cf Fonct. transf.})$$

u o y reste harmonique
après faire lgt variable

2- On remarque que u est donc la partie réelle de
 $z \in \Delta, R(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} v(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}$ et holomorphe sur Δ
 donc u est harmonique sur Δ

3- La fonction R se développe en série entière de la
façon suivante sur Δ .

$$R(z) = R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} v(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}$$

sur $\Delta_a, D^n(u', r^n \cos(n\theta)) = \int_{\Delta_a} du' \wedge n d(r^n \cos n\theta)^*$

car $D(u') = f du' \wedge (du')^*$

$D(r^n \cos n\theta) = f du' \wedge (du')^*$ car les coordonnées sont réelles

$$= \int_{\Delta_a} du' \wedge n d(r^n \sin n\theta)$$

$$= \int_{\partial \Delta_a} u' d(r^n \sin n\theta)$$

$$= r^n \int_{\partial \Delta_a} u' \cos(n\theta) d\theta$$

partie réelle de R(z)

$$u(z) = u(0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n + b_n Q_n$$

$$a_n = P_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} r^n} r^n \cos(n\theta)$$

$$b_n = Q_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} r^n} r^n \sin(n\theta)$$

$$a_n = D(u', P_n) \text{ et } b_n = D(u', Q_n)$$

On peut vérifier que

$$D^a(P_n, P_n) = \frac{a^n}{2\pi} = D^a(P_n, Q_n)$$

$$D^a(P_n, Q_n) = 0$$

On obtient

$$D^a(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a^n (a_n^2 + b_n^2) \quad \text{Bien définir pour } |a| < 1$$

Par ailleurs, $D(u') = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n + b_n Q_n = D(u') = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

donc $\sum a_n^2 + b_n^2$ est convergente

Donc $\lim_{a \rightarrow 1} D^a(u)$ existe. On la note $D(u)$.

$$\text{et } D(u) \leq D(u').$$

$$\text{et enfin } D(u' - u) = D(u') - D(u) \quad \square$$

03/10

On garde les notations de la proposition 2) 3)

$v \in C^0(\mathbb{D})$, u admissible harmonique
 u' admissible

$$u|_{\partial\mathbb{D}} = v$$

$$u'|_{\partial\mathbb{D}} = v$$

donnée par le noyau de Poisson

$$u(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1-x^2}{1+x^2-2x\cos(\theta-\varphi)} v(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \quad z = xe^{i\varphi}$$

$$R(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} v(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$u = \Re(R)$$

$$= v(0) + \sum a_n P_n + b_n Q_n$$

$$D^a(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a^n (a_n^2 + b_n^2)$$

On cherche à contrôler les dérivées de u à l'aide de $D(u)$

• en 0, $\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 = \frac{1}{\pi} (a_1^2 + b_1^2) \leq \frac{1}{\pi} D(u)$

• sur Δ , on utilise les Conformations du disque $z \mapsto \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 (re^{i\varphi}) + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 \leq \frac{D(u)}{\pi(1-r^2)^2}$$

Au voisinage de $\partial\Delta$, $\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \leq \frac{C}{1-r}$

On contrôle maintenant la norme L^2 de u

$$\int_{\Delta} |u(z) - u(0)|^2 dx dy = \sum_{n \geq 1} \frac{2^{2n+2}}{2n(n+1)} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{a^2}{4} D(u)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} P_m P_n dx dy &= \int_{\Delta} Q_m Q_n dx dy \\ &= \frac{a^{2n+2}}{2n(n+1)} \delta_{mn} \end{aligned}$$

On veut contrôler la norme L^2 de u'

$$u' = u + \underbrace{u' - u}_w$$

$$w(re^{i\varphi}) = - \int_r^1 \frac{\partial w}{\partial \rho} (\rho e^{i\varphi}) d\rho \quad \text{car } w=0 \text{ sur } \partial\Delta$$

$$\begin{aligned} |w(re^{i\varphi})|^2 &\leq \left| \int_r^1 \left| \frac{\partial w}{\partial \rho} \right| \sqrt{\rho} \frac{1}{\sqrt{\rho}} d\rho \right|^2 \\ &\leq \int_r^1 \left| \frac{\partial w}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho \int_r^1 \frac{d\rho}{\rho} \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} |w(re^{i\varphi})|^2 d\varphi \leq \rho \int_{\frac{1}{\rho}}^1 \frac{1}{\rho} D(w)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} |w(re^{i\varphi})|^2 &\leq \int_0^1 \rho \int_{\frac{1}{\rho}}^1 \frac{1}{\rho} D(w) d\rho \\ &\leq \frac{1}{4} D(w) \end{aligned}$$

$$u_0 = \int_{\partial\Omega} u \frac{d\theta}{2\pi} = \int_{\Omega} u \frac{d\theta}{2\pi} = u(0)$$

$$u' - u'_0 = u - u(0) + \omega$$

$$\begin{aligned} I(u' - u'_0) &\leq 2(I(u - u(0)) + I(\omega)) \\ &\leq 2\left(\frac{1}{4} D(u) + \frac{1}{4} D(\omega)\right) \stackrel{\text{orthogonalité}}{=} \frac{1}{2} D(u) \end{aligned}$$

Fonctions Harmoniques sur les surfaces de Riemann

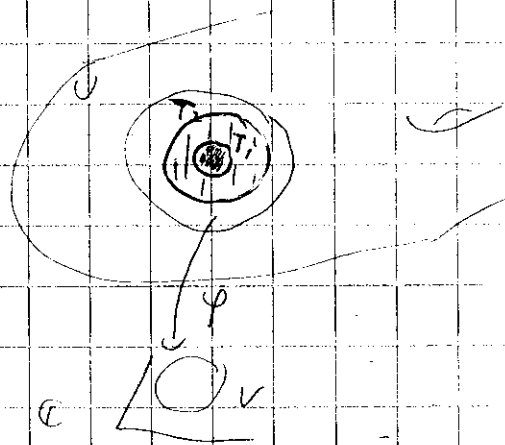
Soit X une surface de Riemann, $x_0 \in X$, z coordonnée holomorphe centrée en x_0 . On cherche une fonction f harmonique sur $X - \{x_0\}$ qui se comporte comme $\Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$ au voisinage de x_0 .

On va minimiser la masse de Dirichlet sur un ensemble de fonctions admissibles.

Notations: $T_r = \varphi^{-1}(\{ |z| < r \})$
 $T_1 = \varphi^{-1}(\{ |z| < 1 \})$
 $T_2 = \varphi^{-1}(\{ |z| < 2 \})$

$$\phi(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} + z$$

$$\text{ainsi } \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{|z|=1} = 0$$



Définition Une fonction $v \in \mathcal{C}^1(X - \{x_0\}, \mathbb{R})$ est dite admissible si $\int_{T_1} v = 0$.

- * $v = \phi$ + une fonction $\mathcal{C}^1$ sur tout T_2
- * $D_{X-T_1}(v)$ et $D_{T_1}(v - \phi)$ sont finies

on notera alors $v_v = v = v|_{X-T_1}$ $v_v^* = v^* = (v - \phi)|_{T_2}$

$$D(V) \stackrel{\text{def}}{=} D_{X-T_1}(u) + D_{T_1}(u^*)$$

$$d = \inf_{V \text{ admissible}} D(V) \geq 0.$$

On dit que $\lim_{V \text{ admissible}} a(V)$ existe et vaut α si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |D(V) - d| < \delta \Rightarrow |a(V) - \alpha| < \varepsilon$$

Lemme 11 Soit V_1 et V_2 deux fonctions admissibles telles que

$V_1 = V_2$ hors d'une boule $B \subset X$

• Si $B \subset X - T_1$ $D(V_1) - D(V_2) = D_B(u_1) - D_B(u_2)$

• Si $B \subset T_2$ $D(V_1) - D(V_2) = D_B(u_1^*) - D_B(u_2^*)$

démonstration : Si $B \subset X - T_1$ facile

• Si $B \subset T_2$, on a une forme croisée sur $T_2 - T_1$

$$u = u^* + \phi$$

$$\int_{\partial T_1} \int_{\partial T_2} d(u_1^* - u_2^*) \wedge (d\phi)^*$$

$$= \iint_{T_2 - T_1} d((u_1^* - u_2^*) \wedge (d\phi)^*)$$

car $(d\phi)^*$ est une 1-forme fermée sur $T_2 - T_1$ (car ϕ y est harmonique)

$$= \left[\int_0^{2\pi} (u_1^* - u_2^*) (d\phi)^* \right]_1^2$$

sur ∂T_2 , $u_1^* = u_2^*$
sur ∂T_1 , $(d\phi)^* = 0$
car $\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\partial T_1} = 0$

$$= 0$$

Lemme 12 1) V_1 et V_2 admissibles

$$\sqrt{D(V_1 - V_2)} \leq \sqrt{D(V_1) - d} + \sqrt{D(V_2) - d}$$

On écrit $D\left(\frac{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) \geq d$ $\downarrow$

2) K compact $\exists c > 0 \quad \forall v_1, v_2$ admissibles.
 $I_K(v_1 - v_2) \leq c D(v_1 - v_2)$

Cette inégalité $I(v - v_0) \leq \frac{1}{2} D(v)$ sur le disque $\downarrow$

3) Si B est un disque de rayon a dans une carte,
 $\exists c > 0 \quad \forall v_1, v_2$ admissibles

$B \subset X - T_1 \quad |M_B v_1 - M_B v_2| \leq \frac{c}{a} (\sqrt{D(v_1)} + \sqrt{D(v_2)})$
 $B \subset T_2 \quad |M_B v_1^* - M_B v_2^*| \leq \underline{\hspace{2cm}}$

Resulte de l'inégalité de Cauchy - Schwarz

$|\pi a^2 M_B(v_1 - v_2)|^2 \leq \pi a^2 I_B(v_1 - v_2) \quad \downarrow$

Conséquence: Si $B \subset X - T_1$ $\lim_{p \rightarrow B} M_{p+B} v$ existe et est notée $u_{2B}(p)$,
 z coordonnée Riemannienne sur B
 $(M_B \text{ dépend du choix de } z)$

Si $p+B \subset T_2$ $\lim_{p \rightarrow B} M_{p+B} v^*$ existe et est notée $u_{2B}^*(p)$
 v admissible

On vérifie sur $T_2 - T_1$ $u_{2B} = u_{2B}^* + c$

lemme 3: u_{2B} est harmonique sur $\{p \in X \mid p+B \subset X - T_1\}$
 u_{2B}^* $\underline{\hspace{2cm}}$ $\{p \in X \mid p+B \subset T_2\}$
 u_{2B} ne dépend ni de B , ni de z .

lem: On considère pour chaque v admissible, la fonction v_p
sur B harmonique avec les mêmes valeurs au bord de B que v
On considère une suite v_k de fonctions régularisantes

$\begin{cases} v & \text{sur } X - B \\ v_k & \text{sur } B \end{cases}$

En utilisant le contrôle des dérivées de v_R au voisinage du bord de B , on montre que pour ε assez petit

$$D_B(v_R) \leq D_B(v_\varepsilon) \leq D_B(v)$$

W v_R admissible

$$\sqrt{D_B(W - v_\varepsilon)} \leq \sqrt{D(W) - d} + \sqrt{D(v) - d}$$

A la limite sur v_ε

$$\sqrt{D_B(W - v_R)} \leq \underline{\hspace{10em}}$$

$$|M_B(W) - M_B(v_R)| \leq \frac{C}{a} (\sqrt{D(W) - d} + \sqrt{D(v) - d})$$

$$|M_B(W) - v_R| \leq \frac{C}{a} (\hspace{10em})$$

La fonction $u_{2B}(p) = \lim_{W} M_{A+B}(W)$ est limite uniforme
de fonction harmonique $(v_R)_{v \text{ admissible}}$ sur les boules
qui sont à distance finie de ∂T_1

De manière analogue on peut voir u_{2B} est défini par $u_{2B} = u_{2B} \vee 0$

$$\text{la fonction } \begin{cases} u = u_{2B} \text{ sur } X - T_1 \\ u^* + \phi = u_{2B}^* + \phi \text{ sur } T_2 \\ (u^* + \phi = u \text{ sur } T_2 - T_1 \end{cases} = X_{x_0}$$

est harmonique sur $X - T_1$ avec une singularité comparable à $\text{Re}(\frac{1}{z})$ en x_0 .

Si X est compacte, la singularité suffit à caractériser cette fonction à une constante additive près

Si X n'est pas compacte, il faudrait montrer que la fonction X_{x_0} réalise la borne inférieure d

Prescrire d'autre type de singularité

On dira que deux fonctions sur X ont des singularités comparables en x_0 si leur différence est $\mathcal{O}^\infty$ au voisinage de x_0 .

* On peut construire une fonction harmonique sur $X \setminus \{x_0\}$ avec singularité en x_0 comparable à $\operatorname{Re} \left(\frac{1}{z^n} \right)$ (resp $\operatorname{Im} \left(\frac{1}{z^n} \right)$).
On la notera $X_{x_0}^n$ (resp $Y_{x_0}^n$).

$$u_{x_0}^n := dX_{x_0}^n + i(dX_{x_0}^n)^* \\ \text{(resp } \eta_{x_0}^n = dY_{x_0}^n + i(dY_{x_0}^n)^* \text{)}$$

$$X_{x_0}^n \sim \operatorname{Re} \left(\frac{1}{(z - z(x_0))^n} \right) \quad u_{x_0}^n \sim -n \frac{dz}{(z - z(x_0))^{n+1}}$$

$$Y_{x_0}^n \sim \operatorname{Im} \left(\frac{1}{(z - z(x_0))^n} \right) \quad \eta_{x_0}^n \sim -n \frac{idz}{(z - z(x_0))^{n+1}}$$

de question de 1-pour microscopie dans des pch d'ordre au moins 2

On peut construire une fonction harmonique sur $X \setminus \{x_1, x_2\}$ avec singularités comparable à $\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left(\log \frac{z - z_1}{z - z_2} \right)$ ($z_1 = z(x_1), z_2 = z(x_2)$)

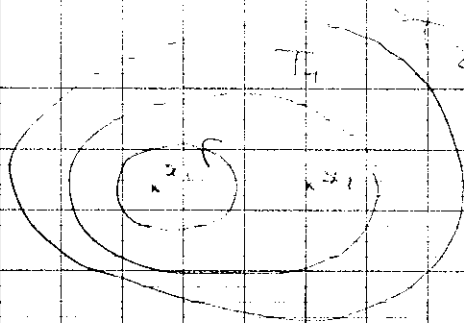
On la notera R_{x_1, x_2} .

$$\rho_{x_1, x_2} := dR_{x_1, x_2} + i(dR_{x_1, x_2})^*, \quad \rho_{x_1, x_2} \sim \frac{dz}{z - z_1} - \frac{dz}{z - z_2}$$

$$\rho_{x_1, x_2} \sim \frac{dz}{z - z_1} - \frac{dz}{z - z_2}$$

On peut construire une fonction harmonique sur $X \setminus \{x_1, x_2\}$ (x_1, x_2 dans le même ouvert de centre) avec singularité comparable à $\frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left(\log \frac{z - z_1}{z - z_2} \right)$

Cette dernière fonction n'est pas bien définie.



en faisant un tour autour de z_1
pour connaître comment ϕ varie
lorsque z effectue un tour

On choisit la fonction $\phi = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Im} \left(\log \left(\frac{z-z_1}{z-\bar{z}_1} / \frac{1-\bar{z}_2 z}{1-\bar{z}_1 z} \right) \right)$

dont la dérivée normale sur ∂T_1 est nulle et qui est définie
sur $T_2 - T_1$.

On obtient alors une fonction u harmonique sur $X - T_1$
et u harmonique sur T_2 .

telles que $u = u^* + \phi$ sur $T_1 - T_1$

On note $\theta_{z_1, z_2} = \begin{cases} du \text{ sur } X - T_1 \\ du^* + d\phi \text{ sur } T_2 \end{cases}$ d.f. θ_{z_1, z_2} sur T_2
est harmonique à d .

On note $\omega_{z_1, z_2} = \theta_{z_1, z_2} + i (\theta_{z_1, z_2})^*$

ici θ_{z_1, z_2} n'est pas exacte (c'est une 1-forme méromorphe sur X)

$$\omega_{z_1, z_2} \text{ est une 1-forme méromorphe sur } X$$

$$\omega_{z_1, z_2} \sim \frac{dz}{z-z_1} \quad \frac{dz}{z-z_2} \sim \omega_{z_1, z_2}$$

Pour deux points P_0 et P on choisit un chemin γ

On peut donc définir P_0, P indépendamment du choix de γ et des z_i .

On choisit un facet γ sur X

on choisit $(x_i)_{i=1}^n$ sur γ ($x_{p+1} = x_1$)

On considère $u_\gamma = \sum_{i=1}^n \omega_{x_i, x_{i+1}}$ est une 1-forme holomorphe

Ne dépend pas du choix des x_i sur γ

Lemme Pour toute 1-forme fermée γ sur X (à valeurs réelles)

$$\int_X \gamma = \int_X \left(\sum_{i=1}^p \Theta_{z_i, z_{i+1}} \right) \wedge \gamma$$

démonstration $\Theta_{z_1, z_2} = \begin{cases} du & \text{sur } X - T_1 \\ du^* + d\phi & \text{sur } T_1 \end{cases}$

$$i_{z_1, z_2} = \Theta_{z_1, z_2} + i(\Theta_{z_1, z_2})^*$$

$$\begin{aligned} \int_X \Theta_{z_1, z_2} \wedge \gamma &= \int_{X - T_1} \Theta_{z_1, z_2} \wedge \gamma + \int_{T_1} \Theta_{z_1, z_2} \wedge \gamma \\ &= \int_{X - T_1} du \wedge \gamma + \int_{T_1} (du^* + d\phi) \wedge \gamma \end{aligned}$$

car γ est fermée et T_1 simplement connexe du est exacte sur T_1
on trouve la 1-forme du sur T_1 par la 2-forme γ .

$$= \int_{\partial T_1} \gamma - \int_{\partial T_1} f du^* - \int_{T_1} df \wedge d\phi$$

$$\int_{T_1} df \wedge d\phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{T_1 - D(z_1, \epsilon) - D(z_2, \epsilon)} df \wedge d\phi \quad \text{car } df \text{ est intégrable}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\partial T_1} f d\phi - \int_{\partial D(z_1, \epsilon)} f d\phi - \int_{\partial D(z_2, \epsilon)} f d\phi \right)$$

$$\int_{T_1} df \wedge d\phi = \int_{\partial T_1} f d\phi + f(z_1) - f(z_2)$$

$\phi \sim \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left(\log \left(\frac{z - z_2}{z - z_1} \right) \right)$

De plus, $\int_{\partial T_1} \gamma = \int_{\partial T_1} \gamma df = - \int_{\partial T_1} f du$

donc $\int_X \Theta_{z_1, z_2} \wedge \gamma = f(z_2) - f(z_1) = \int_X df = \int_X \gamma$

Lemme: Si α est un 1-cocycle qui ne passe ni par x_1 ni par x_2
alors $\int_{\alpha} \Theta_{x_1, x_2}^{\gamma} = \text{intersection}(\alpha, \gamma)$

Proposition: Sur une surface de Riemann, une 1-forme fermée dont l'intégrale sur tous les lacets est nulle est exacte.

démonstration: $\tilde{X}$ Soit $\int$ 1-forme fermée.
 revêtement universel $\downarrow$ $(\pi^*) \int_{\tilde{X}} \tilde{\omega} := \int(\tilde{X}) \cdot \pi_* \gamma$
 X avec $\tilde{\omega} \in T_{\tilde{X}}$ et $\pi_* : T_{\tilde{X}} \xrightarrow{d\pi} T_X$

$$\int \stackrel{\text{loc}}{=} d\pi \quad \pi^* \int \stackrel{\text{loc}}{=} d(\pi^* \int)$$

$\pi^* \int$ est fermée sur $\tilde{X}$ simplement connexe.
 Il existe $F \in C^\infty(\tilde{X})$ $\pi^* \int = dF$
 $F(\gamma \cdot \tilde{x}) - F(\tilde{x}) = \int_{\tilde{\gamma}} dF = \int_{\tilde{\gamma}} \pi^* \int$
 par la propriété de l'intégrale
 $= \int_{\gamma} \int = 0$ par R_périodicité

Il existe une fonction $f \in C^\infty(X)$ telle que $F = f \circ \pi$
 donc $\int = df$ est exacte.

La classe de cohomologie de Rham de $\sum_{i=1}^p \Theta_{x_i, x_{i+1}}$ ne dépend pas du choix des points x_i et du choix du chemin γ dans sa classe d'homotopie.

Lemme: Sur une surface de Riemann compacte, toute 1-forme harmonique est exacte est nulle.

Conséquences: La forme harmonique $\sum_{i=1}^p \Theta_{x_i, x_{i+1}}$ ne dépend pas du choix de x_i et du choix de γ sur X compacte.

démonstration (lemme)

Soit f harmonique : $df = 0$, $d^2f = 0$ et exacte

il existe $f \in C^\infty(X)$ $f = dp$

$$0 = df = d(dp) = \sum f dx_i \wedge dy_i$$

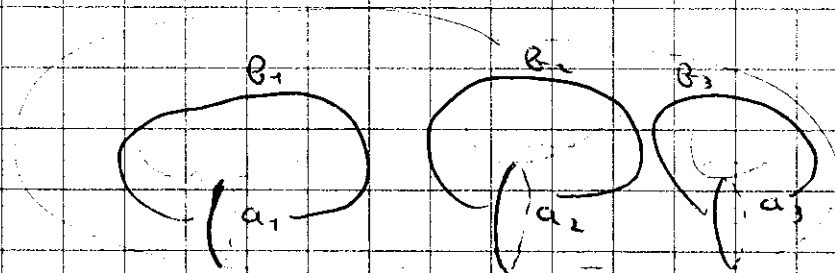
donc f est harmonique sur X compacte, donc constante

$$f = dp = 0$$

08/10

Fonctions Harmoniques	Formes Harmoniques	Formes méromorphes	Pôles	Périodes
X_{x_0} régularité	$d(X_{x_0})$	$dX_{x_0} + i(dY_{x_0})$ régularité	nœuds nulls	$\int_{\gamma} \omega_{x_0}$ si γ imaginaire pure car dX_{x_0} est réelle pure
X_{x_0} $Re\left(\frac{1}{(z-z_0)^n}\right)$	$d(X_{x_0})$	$dX_{x_0} + i(dY_{x_0})$ $=: \eta_{x_0}$	nœuds nulls	périodes imaginaires pures
R_{x_1, x_2} $\frac{1}{2\pi} Re \log\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)$	dR_{x_1, x_2}	P_{x_1, x_2} $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{dz_1}{z-z_1} - \frac{dz_2}{z-z_2} \right)$	nœuds $\frac{1}{2\pi} \alpha z_1$ $-\frac{1}{2\pi} \alpha z_2$	périodes imaginaires pures
θ_{γ} selon Poincaré	$i \gamma$	$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{-idz}{z-z_1} - \frac{-idz}{z-z_2} \right)$ pour Riemann	nœuds nulls	Si α est un réel positif $\int_{\gamma} \theta_{\gamma} = i \alpha \int_{\gamma} \eta(\theta_{\gamma})$ $= \angle \theta_{\gamma}, \theta_{\gamma} \rangle_{B_{\text{dR}}}$

1. formes harmoniques et Potomorphes régulières sur X



En Homologie singulière (X triangulée).

$$H_1(X, \mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}\text{-combinaisons de Facets}}{\text{relation d'Homologie}}$$

Si X est une surface différentiable orientable compacte

$$H_1(X, \mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^g (\mathbb{R}a_i \oplus \mathbb{R}b_i)$$

$$\text{Int}(a_i, b_j) = \pm \delta_{ij}$$

$$\text{Int}(a_i, a_j) = 0$$

$$\text{Int}(b_i, b_j) = 0$$

Cohomologie de De Rham

$$H_{DR}^1(X, \mathbb{R}) = \frac{\{ \text{1-formes diff fermes à valeurs } \mathbb{R} \}}{\{ \text{1-formes exactes} \}}$$

On a un accouplement entre ces deux groupes

$$a) \quad H_1(X, \mathbb{R}) \times H_{DR}^1(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$([\gamma], \int_{\gamma} \omega) \mapsto \int_{\gamma} \omega$$

• est bien définie (formule de Stokes)

• est non dégénérée :

* Soit \$\omega\$ une forme fermée telle que

$$\forall \gamma \text{ Facet } \int_{\gamma} \omega = 0 \quad (\text{et } \gamma \text{ est dans le rayon à droite de } a)$$

par un lemme précédent, \$\omega\$ est exacte, i.e. \$\int_{\gamma} \omega = 0\$

* Soit \$\gamma\$ un Facet de la Base \$a_i, b_j\$

Soit \$\omega\$ la 1-forme harmonique associée

$$\int_X u = \int_X \Theta_X \wedge u$$

En particulier $\int_X (\Theta_X)^* = \int_X \Theta_X \wedge (\Theta_X)^* = \|\Theta_X\|_{\text{Dirichlet}}^2 \geq 0$

Comme Θ_X est harmonique, $(\Theta_X)^*$ est fermée.

Par conséquent, si $[\Theta_X]$ est dans le noyau à gauche de l'accouplement a

$$\Theta_X = 0.$$

Mais comme (a_i, G_i) forment une base de $H_1(X, \mathbb{R})$

$$\exists \lambda_i, \mu_i \text{ tq } \gamma \sim_{\text{homotopie}} \sum \lambda_i a_i + \sum \mu_i G_i$$

$$\lambda_i = \pm \text{Int}(\gamma, G_i) = \pm \int_{G_i} \Theta_X = 0.$$

$$[\Theta_X] = 0.$$

Conséquence : L'espace vectoriel $H^1(X, \mathbb{R})$ est de dimension finie égale à la dimension de $H_1(X, \mathbb{R})$ i.e. $2g(X)$.

- $(\{\Theta_{a_i}\}, \{\Theta_{G_i}\})$ en forment une base.

Soit G deux $\mathbb{R}$ en

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{H} & F^* \\ g & \xrightarrow{\quad} & G(\cdot, g) \\ F & \xrightarrow{\quad} & G^* \end{array}$$

bilinéaire non dégénérée
 H injective car non nulle à nulle
 g injective car non nulle à nulle
 F injective car non nulle à nulle

• Toute 1-forme fermée est cohomologue à une 1-forme harmonique (th de Hodge).

Fonctions méromorphes sur X - fonctions méromorphes additives sur $\tilde{X}$

On suppose toujours X surface de Riemann compacte

Lemme : Soit Y une surface de Riemann simplement connexe

et $\sum_{k=-m}^{\infty} a_k z^k$ un germe de fonction méromorphe en un point de Y . Si le prolongement analytique de ce germe

est possible. Pour tout chemin alors, il définit une fonction méromorphe (uni-valeuse) sur Y .

Lemme: Soit u une 1-forme méromorphe sur Y surface de Riemann simplement connexe avec des résidus partout nuls. alors u est la différentielle d'une fonction méromorphe (uni-valeuse) sur Y .

Remarque 1: $u \stackrel{\text{loc}}{=} \sum_{R=-\infty}^{+\infty} u_R z^R dz$

u est localement exacte si ses résidus (en 0) est nul

Les formes méromorphes $\omega_{x_0}^n$ et $\eta_{x_0}^n$ sont sans résidu sur X

On considère $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$

Les formes $\pi^* \omega_{x_0}^n$ et $\pi^* \eta_{x_0}^n$ sont différentielles de fonctions méromorphes sur $\tilde{X}$

$$F(\tilde{x}_0 + \tilde{\gamma}) - F(\tilde{x}_0) = \int_{\tilde{\gamma}} dF = \int_{\tilde{\gamma}} \pi^* u = \int_{\gamma} u \quad (u = \omega_{x_0}^n \text{ ou } \eta_{x_0}^n)$$

Il faut donc calculer les périodes des formes $\omega_{x_0}^n$ et $\eta_{x_0}^n$, i.e. leur intégrale sur les lacets de X .

Proposition: $\int_{\gamma} \omega_{x_0}^n = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \operatorname{Re} \left(\frac{d^{n-1} i\gamma}{dz^{n-1}} \right) (x_0)$

$$\int_{\gamma} \eta_{x_0}^n = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \operatorname{Im} \left(\frac{d^{n-1} i\gamma}{dz^{n-1}} \right) (x_0)$$

Remarque 2: $i\gamma$ 1-forme holomorphe associée à γ

On a choisi une coordonnée holomorphe z au voisinage de x_0 .

$X_{x_0}^n$ et donc $\Theta_{x_0}^n$ ont un développement au voisinage de x_0 qui dépend de cette coordonnée.

On peut écrire au voisinage de x_0 $i\gamma \stackrel{\text{loc}}{=} \int_{\gamma} p dz$ où p est holomorphe.

$$\frac{d^{n-1} i\gamma}{dz^{n-1}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^{n-1} p}{dz^{n-1}} dz$$

L'idée de la démonstration est : pour z_1, z_2 on utilise

$$f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \log \left(\frac{z - z_1}{z - z_2} \right) \frac{1 - \bar{z}_2 z}{1 - \bar{z}_1 z}$$

Avec $z_1 = 0$ $z_2 = \varepsilon \tau_1$

$$f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \log \left(\frac{z - \varepsilon \tau_1}{z(1 - \varepsilon \tau_1 z)} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \left(\frac{z^{-n} + z^n}{n} \right) \tau_1^n$$

$$\frac{\varepsilon^n}{n} z^{-n} \tau_1^n$$

10/10

Proposition : $\int_{\gamma} \eta_{x_0}^n = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow x_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \eta$

$$\int_{\gamma} \omega_{x_0}^n = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow x_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \omega$$

(Formules de réciprocité)

dem : Nagas Riman (compact Riemann surfaces)

Soit $p_1, \dots, p_N$ N points distincts sur X (surface de Riemann compacte & connexe)
 $n_1, \dots, n_N$ N entiers naturels (ordres de pôles en p_i)

On note $H^0(X, \mathcal{O}_X(\sum n_i p_i))$ l'espace des fonctions méromorphes sur X avec comme seules singularités éventuelles des pôles d'ordre au plus n_i en p_i

On note $H^0(X, \Omega_X^1(-\sum n_i p_i))$ l'espace des 1-formes méromorphes sur X avec des zéros d'ordre au moins n_i en p_i

• $\dim_{\mathbb{R}} H^0(X, \Omega_X^1(-\sum n_i p_i)) = \dim_{\mathbb{R}} H^0(X, \Omega_X^1)$

$$= \dim_{\mathbb{R}} \left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \lambda_R(p_i), \lim_{z \rightarrow p_i} \dots \right)$$

$$\begin{aligned} 1 \leq i \leq N \\ 1 \leq r \leq n_i \\ 1 \leq R \leq 2g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H^0(X, \Omega_X^1) &\rightarrow \oplus \mathbb{R} \\
 \mu &\mapsto \left(\begin{array}{c} f(p_1) \\ f'(p_1) \\ \vdots \\ f^{n-1}(p_1) \\ \vdots \\ f(p_n) \\ f'(p_n) \\ \vdots \\ f^{n-1}(p_n) \end{array} \right) \\
 &\mu \mapsto \sum_{j=1}^n p_j dz
 \end{aligned}$$

$$= 2g - n \text{ rang}_A (\quad)$$

• Soit $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(\sum m_i p_i))$

Au voisinage de p_j

$$f \stackrel{p_j}{\sim} \sum_{m=1}^{n_j} (a_m^j + i b_m^j) z_j^{-m} \quad \text{fonction holomorphe } a_m^j, b_m^j \in \mathbb{R}$$

$$df = \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{n_j} a_m^j \omega_{p_j}^m + b_m^j \eta_{p_j}^m \quad \text{est une 1-forme holomorphe sur } X$$

$$\text{donc } df = \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{n_j} (\quad) + \sum_{R=1}^{2g} \lambda_R \gamma_R$$

Comme les périodes de df sont nulles et celles des ω et η imaginaires pures

$$\begin{aligned}
 \forall p \quad \sum_{R=1}^{2g} \lambda_R \int_{\gamma_p} \gamma_R &= 0 = \sum_{R=1}^{2g} \lambda_R \int_{\gamma_p} \theta \gamma_R \\
 &= \sum_{R=1}^{2g} \lambda_R \text{Im}(\langle \gamma_R, \gamma_p \rangle) \\
 &= (\text{Im}(\langle \gamma_R, \gamma_p \rangle)) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{2g} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

dans la Base $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g$

$$(\text{Im}(\langle \gamma_R, \gamma_p \rangle)) \cdot \begin{pmatrix} \boxed{b+1} \\ \boxed{1 \ 0} \\ \boxed{0 \ -1} \\ \boxed{1 \ 0} \end{pmatrix}$$

La forme d'intersection est non dégénérée
donc les α_i sont tous nuls

$$\text{donc } dP = \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^{m_j} (a_{pj}^m \omega_{pj}^m + b_{pj}^m \eta_{pj}^m)$$

dP est exacte, ses périodes sont nulles

$$\forall p \quad \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^{m_j} a_{pj}^m \int_{\gamma_p} \omega_{pj}^m + b_{pj}^m \int_{\gamma_p} \eta_{pj}^m = 0.$$

$$\dim_{\mathbb{R}} H^0(X, \mathcal{O}_X(\sum n_i p_i)) = \underbrace{2}_{\text{dim espace des sections holomorphes}} + 2 \underbrace{\sum_{i=1}^N n_i}_{\text{deg } P} - \underbrace{\text{rang} \left(\int_{\gamma_p} \omega_{pj}^m, \int_{\gamma_p} \eta_{pj}^m \right)}_{\text{deg } P \text{ période}}$$

Théorème de Riemann - Rost

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{O}_X(\sum n_i p_i)) - \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \Omega_X^1(-\sum n_i p_i)) = 1 + \sum_{i=1}^N n_i - g$$

Proposition : Si $(\gamma_R)_{R=1}^{2g}$ est une base de l'espace vectoriel $H_1(X, \mathbb{R})$
alors $(\omega_{\gamma_R})_{R=1}^{2g}$ est une base de $H^0(X, \Omega_X^1)$ l'espace
des 1-formes différentielles sur X

dém. (ω_{γ_R}) est une famille $\mathbb{R}$ -libre car la famille de ses parties
réelles (ω_{γ_R}) est $\mathbb{R}$ -libre

Si ω est une 1-forme différentielle, sa (1) est harmonique.

$$\omega \in H^0(X, \Omega_X^1) = \sum \mathbb{R} \omega_{\gamma_R}$$

$\omega = \sum \mathbb{R} \omega_{\gamma_R}$ est une 1-forme différentielle de partie réelle
nulle. Elle est donc nulle. $\square$

En particulier, " $R^0 = \dim_{\mathbb{C}} H^0$ "

$$R^0(X, \mathcal{O}_X(\sum n_i p_i)) \geq 1 + \sum_{i=1}^N n_i - g$$

Si $\sum_{i=1}^n n_i > g$ alors il existe une fonction
 méromorphe non constante avec
 comme seules singularités des pôles d'ordre au plus n_i en p_i .

Chap II

Applications entre surfaces de Riemann

Toute fonction méromorphe $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ sur une surface de Riemann donne lieu à une application holomorphe $\underline{f}: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ (et réciproquement $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$)

Application du théorème de Riemann-Roch

Toute surface de Riemann compacte connexe de genre g admet une application $\underline{f}: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ revêtement ramifié

(application surjective propre qui est un revêtement en dehors d'un nombre fini de points $\mathbb{P}^1$)

de degré inférieur à $g+1$ (on prend $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X((g+1)p_0))$)

genre 0: $\underline{f}$ est un isomorphisme

La seule surface de Riemann de genre 0 (à isomorphisme près) est la droite complexe $\mathbb{P}^1$.

(À isomorphisme près, il n'y a qu'une structure de surface de Riemann sur la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$)

genre 1: Toute surface de Riemann de genre 1 se réalise comme revêtement double de $\mathbb{P}^1$ (toute surface de Riemann qui peut se réaliser comme revêtement double de $\mathbb{P}^1$ s'appelle surface hyper-elliptique: en particulier elle admet une involution holomorphe)

Degré canonique d'une surface de Riemann

(g2) Comme le quotient de deux 1-formes holomorphes sur X (compacte) est une fonction méromorphe (avec donc autant de pôles que de zéros comptés avec multiplicité) deux 1-formes holomorphes ont le même nombre de zéros. On appelle ce nombre, degré canonique de X noté d_X

Soit f une 1-forme méromorphe sur X (en genre 0 pas de 1-forme méromorphe). On note $\text{div } f = \sum_{i=1}^n n_i p_i$ où les p_i sont les zéros de f avec multiplicité n_i .

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, \mathcal{O}_X(\sum n_i p_i)) & \xrightarrow{\quad} & H^0(X, \Omega_X^1) \\ f & \mapsto & f \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \end{array} \quad \text{et bien méromorphe}$$

C'est un isomorphisme

Le théorème de Riemann-Roch donne pour le diviseur de f

$$\begin{aligned} R^0(X, \mathcal{O}(\text{div } f)) &= R^0(X, \Omega_X^1(-\text{div } f)) \stackrel{\text{RR}}{=} 1 + d_X - g \\ &= R^0(X, \Omega_X^1) - 1 \\ &= g - 1 \\ d_X &= 2(g-1) \end{aligned}$$

En genre 0 : $X \cong \mathbb{P}^1$ On prend des coordonnées homogènes $[X:Y]$
et $x = \frac{X}{Y}$ sur l'ouvert $Y \neq 0$ ($\mathbb{P}^1 - \{[1:0]\} = U_x$)

$$y = \frac{Y}{X} \text{ sur l'ouvert } X \neq 0 \quad (\mathbb{P}^1 - \{[0:1]\}) = U_y$$

la forme $\int \frac{dx}{y^2}$ sur U_x est bien définie sur $U_x \cap U_y$ $\begin{cases} x = \frac{1}{y} \\ dx = -\frac{1}{y^2} \end{cases}$

est une forme méromorphe sur $\mathbb{P}^1$ avec comme seule singularité un pôle d'ordre 2 en $[1:0]$ et sans zéro

Il est naturel de poser $d_X = d_{\mathbb{P}^1} = -2$.

Γ d_X peut être défini comme le nombre de zéros - nb de pôles comptés avec multiplicités d'une 1-forme méromorphe.

La formule $d_X = 2g - 2$ reste vraie en genre 0.

Ramification

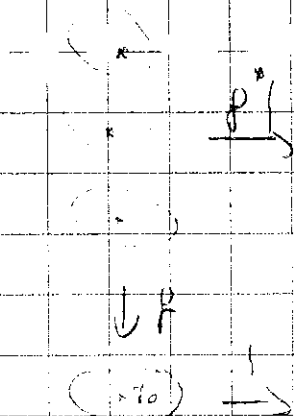
Soit $f: X \rightarrow Y$ une application holomorphe non constante entre surfaces de Riemann compactes connexes.

On cherche à relier les degrés canoniques de X et de Y .

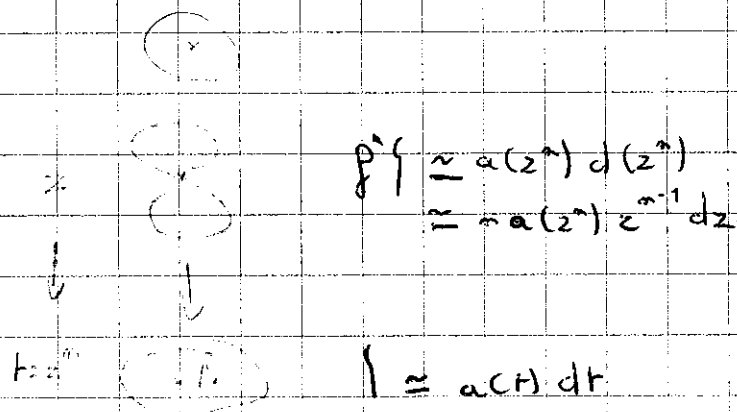
• Si ω est une 1-forme holomorphe sur Y alors $f^*\omega$ est une 1-forme holomorphe sur X .

• Si y_0 est une valeur non critique de f

(aucun point de $f^{-1}(y_0)$ n'est ramifié, m_i est de multiplicité > 1) alors $\# \{ \text{zéros de } f^*\omega \text{ sur } f^{-1}(y_0) \} = (\deg f) \# \{ \text{zéros de } \omega \text{ en } y_0 \}$



• Si y_0 est une valeur critique de f



$$\# \{ \text{zéros de } f^*\omega \text{ sur } f^{-1}(y_0) \} = (\deg f) \# \{ \text{zéros de } \omega \text{ en } y_0 \} + \sum_{x_i \in f^{-1}(y_0)} (m_i - 1)$$

$$\bullet \quad d_x = \deg f \, d_y + \sum_{x \in X} [\text{mult}_x(f) - 1]$$

$$[2g(X) - 2] = (\deg f) [2g(Y) - 2] + \sum_{x \in X} [\text{mult}_x(f) - 1]$$

Formule de Riemann Hurwitz

- En genre 1, X se réalise comme revêtement double de $\mathbb{P}^1$
avec $d_x - 2d_{\mathbb{P}^1} = \# \text{ points de ramification (ici } \text{mult}_x f \geq 2)$
 $= 4$

- En genre 2, le théorème de Riemann-Roch donne une fonction méromorphe avec comme seule singularité un pôle d'ordre au plus $g+1 = 3$, donc un revêtement triple de $\mathbb{P}^1$

Mais, le quotient de deux 1-formes méromorphes ($H^0(X, \Omega_X) =$ indépendantes, donne une fonction méromorphe avec au plus $d_x = 2g - 2 \geq 2$ pôles donc un revêtement double de $\mathbb{P}^1$

Il y a $d_x - 2d_{\mathbb{P}^1} \geq 6$ points de ramification

(en particulier, les courbes de genre 2 sont hyper-elliptiques)

Chap II

Morphismes de surfaces de Riemann et extension de corps

Bibli Dufour - Analyse complexe

Remarque

Théorème: Soit $\pi: X \rightarrow Y$ une application propre non constante surjective entre surfaces de Riemann connexes (ex: si X est compacte connexe et Y connexe)

alors on peut définir $\pi^*: \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$

$$f \mapsto \pi \circ f$$

qui est un morphisme de corps et fait donc de $\mathcal{O}(X)$ une extension algébrique de $\mathcal{O}(Y)$ de degré inférieur au degré de π

Remarque $\mathcal{O}(X)$ et $\mathcal{O}(Y)$ sont non vides (même si X et Y ne sont pas compactes). Comme X et Y sont connexes $\mathcal{O}(X)$ et $\mathcal{O}(Y)$ sont des corps (intègre).

π^* est bien définie car π est surjective

$\forall f \in \mathcal{O}(Y) \quad \text{Im } \pi \not\subseteq \text{pole } f$

π est propre donc ses fibres sont finies

Précision sur le degré:

$\mathcal{O}(X)$ est engendré tant qu'algèbre sur $\mathcal{O}(Y)$ par toute fonction f de degré maximal et en particulier par toute fonction f qui prend des valeurs distinctes sur une fibre de π (ie $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(Y)[f]$).

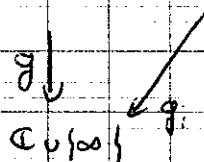
Si $g \in \mathcal{O}(X)$ $\exists d \leq \deg \pi \quad \exists (a_i)_{i=0}^d \in \mathcal{O}(Y)$

$$g = \sum_{i=0}^d (\pi^* a_i) f^i$$

Démonstration! Mg $\pi^* : \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ est une extension algébrique.

Soit $g \in \mathcal{O}(X)$. Soit $c \in Y$ une valeur non critique de π .

Il existe U voisinage ouvert de c dans Y tel que $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^{\deg \pi} U_i$ $U_i \xrightarrow{\pi_i} U$ biholomorphisme



$$\text{Sur } U, \sum_{i=1}^{\deg \pi} (T - g_i(y)) \in \mathcal{O}(U)[T]$$

$$= \sum_{R=0}^{\deg \pi} (-1)^R \sigma_R^g(y) T^{\deg \pi - R}$$

$$\sigma_1^g(y) = \sum g_i(y)$$

$$\sigma_2^g(y) = \sum_{i < j} g_i(y) g_j(y)$$

Sur l'intersection de deux ouverts qui ne contiennent pas de valeurs critiques, les σ_j^g coïncident.

On obtient donc $(\deg \pi + 1)$ fonctions holomorphes sur $Y - \pi(R)$.

A lieu de ramification $R = \{x \in X \mid \text{mult}_x \pi > 1\}$

Si $\pi^{-1}(c)$ contient un pôle de g , et y une coordonnée holomorphe au voisinage de c_0 , comme $y \circ \pi$ s'annule sur $\pi^{-1}(c_0)$, il existe R tel que

$$(y \circ \pi)^R g \text{ est holomorphe sur } \pi^{-1}(U)$$

$$\sigma_R^{(y \circ \pi)^R g} = y^R \sigma_R^g \text{ est holomorphe}$$

donc σ_R^g est méromorphe au c .

Les σ_R^g sont donc méromorphes sur $Y - \pi(R)$.

Les $\sigma_R^{(y \circ \pi)^R g}$ sont localement bornées au voisinage de R .

Les fonctions σ_R^g se prolongent en fonctions méromorphes sur Y .

et donnent une équation satisfaite par g

Soit n_0 le maximum des degrés des éléments g de $\mathcal{M}(X)$
polynômes minimaux des

$$n_0 \leq \deg \pi?$$

Soit g_0 qui réalise ce maximum

Soit $g \in \mathcal{M}(X)$ et $K = \mathcal{M}(Y)(g, g_0) \subset \mathcal{M}(X)$

Comme on est en caractéristique nulle et que K est finie,
alors par le théorème de l'élément primitif, il existe $g_1 \in \mathcal{M}(X)$

$$\text{t.q. } K = \mathcal{M}(Y)(g_1) \quad \mathcal{M}(Y)(g_0) \subset \mathcal{M}(Y)(g_1)$$

$$\deg g_0 \leq \deg g_1 \leq \deg g$$

$$\text{donc } g \in \mathcal{M}(Y)(g_0)$$

$$\mathcal{M}(X) = \mathcal{M}(Y)(g_0)$$

Si g prend $(\deg \pi)$ valeurs distinctes sur $\pi^{-1}(y_0)$

alors le degré du polynôme minimal de g dans $\mathcal{M}(Y)[T]$
évalué en y_0 est au moins $\deg \pi$

22/10

Théorème: Soit Y une surface de Riemann connexe et K une
extension algébrique finie de $\mathcal{M}(Y)$. Soit α un élément
primitif de K et $P(T) = T^n + c_1 T^{n-1} + \dots + c_n \in \mathcal{M}(Y)[T]$
son polynôme minimal

Alors il existe une surface de Riemann X connexe, un
morphisme propre non constant surjectif

$$\pi: X \rightarrow Y \text{ de degré } n$$

il existe $g \in \mathcal{M}(X)$ t.q.

$$(T^n P)(g) = \sum_{i=0}^n (c_i \circ \pi) g^{n-i} = 0 \quad (c_0 = 1)$$

En particulier, les deux extensions de $\mathcal{M}(Y)$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(Y) & \hookrightarrow & K = \mathcal{M}(Y)[T]/(P(T)) \\ & & \downarrow \text{isomorphisme} \\ & & \mathcal{M}(X) \end{array}$$

démonstration en trois étapes :

- fonctions algébriques locales
- globalisation - Espace étale
- Ramification

1. Fonctions algébriques locales

Lemme Soient $c_1, \dots, c_n$ des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ disque

$\Delta(A) \subset \mathbb{C}$ et $w_0 \in \mathbb{C}$ un zéro simple de $T^n + c_1(z)T^{n-1} + \dots + c_n(z)$

Alors quitte à restreindre R , il existe une fonction holomorphe γ sur $\Delta(A)$

t.q. $\gamma(z_0) = w_0$ et $P(\gamma) = 0$

démonstration $F(x, y) = y^n + c_1(x)y^{n-1} + \dots + c_n(x)$

w_0 est un zéro simple de $F(0, \cdot)$ donc $\frac{\partial F}{\partial y}(0, w_0) \neq 0$

par le théorème des fonctions implicites

$F(x, y) = 0$ définit au voisinage de $(0, w_0)$ y comme fonction de x , $y = \gamma(x)$

2. Globalisation

Soit Y' l'ouvert non vide de Y où les c_i sont holomorphes et où $P(Y) \in \mathbb{C}[T]$ n'a pas de racines multiples ($P \in \mathbb{C}[Y] \in \mathbb{C}[T]$ est irréductible)

Soit y t.q. $P(y)(T)$ et $\frac{\partial P(y)}{\partial T}$ ont une racine commune

disc $P(y) = 0$ disc $P(y)$ est un polynôme en les c_i

Comme P est irréductible dans $\mathbb{C}[Y] \in \mathbb{C}[T]$ disc P n'est pas identiquement nul et donc Y' non vide

A chaque ouvert U de Y' on associe $G_P(U) = \{ \gamma \text{ holomorphe sur } U \mid P(\gamma) = 0 \}$

A chaque $\gamma \in Y'$ on associe la limite inductive

$$G_{P, \gamma} = \varinjlim_{U \ni \gamma} G_P(U)$$

germe des solutions de l'équation $P(Y) = 0$

Soit $\sigma \in G_{p,y}$

Il existe l'ouvert contenant y et $\varphi \in G_p(K)$

On munit $\angle G_p$ la réunion disjointe des $G_{p,y}$ qd $y \in Y'$

On munit $\angle G_p$ de la topologie la plus fine t_p

$\forall U \subset Y'$ ouvert, $\forall \varphi \in G_p(U)$

$$U \rightarrow \angle G_p$$

est continue

$$y \mapsto (\varphi)_y \text{ (germe de } \varphi \text{ en } y)$$

L'application $p: \angle G_p \rightarrow Y'$

est continue car

germe $\mapsto$ centre du germe

pour tout ouvert $U \subset Y'$, pour tout $\varphi \in G_p(U)$

$$U \rightarrow \angle G_p \xrightarrow{p} Y' \text{ est continue}$$

$$y \mapsto (\varphi)_y \mapsto y$$

Soit $\varphi_y \in \angle G_p$. Il existe $V \subset Y'$ ouvert contenant y et

$\varphi \in G_p(V)$ dont le germe en y est φ_y

{ germes φ en z , $z \in V$ } et un voisinage de φ_y sur

lequel p est un homéomorphisme (d'images $U \rightarrow$ { germes φ en z , $z \in V$ })

z les germes de φ en z

Comme P n'a que des racines simples sur Y' , par le lemme 1, on peut écrire $P(T) = \prod_{i=1}^n (T - \varphi_i)$ pour des φ_i définies sur un voisinage W de y dans Y'

donc $p: \angle G_p \rightarrow Y'$ est un revêtement

$\Gamma p^{-1}(W) = \bigcup_{i=1}^n$ { germes des φ_i en z , $z \in W$ } réunion d'ouverts de $\angle G_p$ chacun isomorphe par p à W

donc $\angle G_p$ admet une unique structure de surface de Riemann X' telle que $p: X' \rightarrow Y'$ soit un revêtement Riemannien

3- Ramification

Pour étendre le revêtement $p: X' \rightarrow Y'$ en une application ramifiée propre surjective et valable dans Y , on définit:

Lemme: Soit X^* une surface de Riemann connexe et $f: X^* \rightarrow \Delta^*$ un revêtement holomorphe non ramifié propre à n feuillets alors il existe un isomorphisme $F: X^* \rightarrow \Delta^*$ tel que

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{F} & \Delta^* \xrightarrow{z} \\ p \downarrow & & \downarrow \downarrow \\ \Delta^* & \xrightarrow{=} & \Delta^* \xrightarrow{z^n} \end{array}$$

démonstration: A isomorphisme près, les revêtements connexes de degré n de Δ^* sont classifiés par les sous-groupes d'indice n de $\pi_1(\Delta) = \mathbb{Z}$. Il existe un isomorphisme de revêtement F

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{F} & \Delta^* \xrightarrow{z} \\ p \downarrow & & \downarrow \downarrow \\ \Delta^* & \xrightarrow{=} & \Delta^* \xrightarrow{z^n} \end{array}$$

Il reste à voir que F est holomorphe

$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ $2\pi i/n$

$$\begin{array}{ccc} \text{revet}^r & \xrightarrow{4} & z \\ \text{Relat} \downarrow & & \downarrow \downarrow \text{revet}^r \\ X^* & \xrightarrow{p} & \Delta^* \xrightarrow{e^{2\pi i/n}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{4} & e \\ & \downarrow & \downarrow \\ X^* & \xrightarrow{F} & \Delta^* \end{array} \quad \alpha, \beta \text{ revet}^r \quad \text{Relat} \quad F = p \circ \alpha^{-1}$$

F est holomorphe et d'inverse holomorphe

Le revêtement $\Delta^* \rightarrow \Delta^*$ se prolonge en un revêtement ramifié $z \rightarrow z^n$

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \rightarrow & \Delta \\ z & \mapsto & z^n \end{array} \quad \text{ramifié en } 0$$

On peut donc étendre le revêtement $X^* \xrightarrow{F} \Delta^*$ au voisinage de chaque point de $Y \rightarrow Y$ en un revêtement ramifié $X \rightarrow Y$ holomorphe, surjectif et propre (marché pour propres)

4 - Construction de g .

On pose pour $\varphi \in X'$ $g(\varphi) := \Psi(p(\varphi))$.

Sur un ouvert W où $\varphi \in G_p(W)$, g est holomorphe et vérifie l'équation $P(g) = 0$ car aussi

comme les c_i sont définis sur Y , $g \in \mathcal{H}(X)$. $\square$

Cas particuliers: Si $Y = \mathbb{P}_C^1$, $\mathcal{H}(Y) = C(z)$ $P \in C(x)[T]$

X est la surface de Riemann

$$X \xrightarrow[\varphi]{\text{étale}} \mathbb{P}^1$$

$\downarrow$

$\mathbb{P}^1$

$\mathbb{P}^1 \xrightarrow{\text{multivaluée en } x \text{ mais mon en } T}$

$x \mapsto \text{solution de } P(x)(T) = 0$

Si φ est un germe de fonction méromorphe au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{P}^1$ qui satisfait l'équation $P(y) = 0$, X est le domaine de définition maximal d'une extension de φ

- Historiquement les surfaces de Riemann sont le revêtement de $\mathbb{P}^1$ —

$$\Gamma \mathcal{H}(Y) = C(z)$$

Toute $\alpha(z) \in C(z)$ donne un élément de $\mathcal{H}(\mathbb{P}^1)$

$$\text{Soit } f \in \mathcal{H}(\mathbb{P}^1) \quad \mathbb{P}^1 \xrightarrow{F} \mathbb{P}^1$$

$$(E_i; (E_i, J))_{i=1}^d \text{ les zéros } F^{-1}([0; 1])$$

$$(E_i; (E_i, J))_{i=1}^d \text{ les pôles } F^{-1}([1; 0])$$

Il y a autant de pôles que de zéros donc $d = g$

$$\frac{f}{z} \text{ ou } s = \frac{\prod_{i=1}^d (E_i X - \alpha_i Y)}{\prod_{i=1}^d (P_i X - \alpha_i Y)}$$

$\frac{f}{z} \in \mathcal{H}(\mathbb{P}^1)$ sans zéros, donc constante $f = \alpha$, $f \in C(z)$

Chap VIIFibré holomorphe en droites complexes

Bibli: Griffiths & Harris : principes of algebraic geometry

I) Définitions:

1) Soit X une surface de Riemann. Un fibré holomorphe en droites complexe sur X est la donnée d'un recouvrement de X par des ouvertés de cartes U_i et sur chaque intersection $U_i \cap U_j$ d'une fonction holomorphe g_{ij} partout non nulle vue comme
 $U_i \cap U_j \ni z \mapsto GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ avec $g_{ji} = g_{ij}^{-1}$
 vérifiant sur tout $U_i \cap U_j \cap U_k$: $g_{ik} = g_{ij} g_{jk}$ et $g_{ii} = id$

Avec ces données, on construit $\coprod U_i \times \mathbb{C} / \sim = L$
 où $\sim$ est la relation d'équivalence :

$$(p_i, z_i) \sim (p_j, z_j) \Leftrightarrow \begin{cases} p_i = p_j \\ z_i = g_{ij}(p_i) z_j \end{cases}$$

Le recouvrement $(U_i \times \mathbb{C})$ de L avec les cartes

$$\begin{aligned} U_i \times \mathbb{C} &\rightarrow U_i \times \mathbb{C} & (\text{où } U_i \xrightarrow{\varphi_i} U_i \text{ carte de } X) \\ (p, z) &\mapsto (\varphi_i(p), z) \end{aligned}$$

font de L une surface complexe (variété complexe de dim. 2)
 avec changements de cartes linéaires par rapport à la seconde variable

$$\begin{array}{ccc} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} & & \\ \swarrow (\varphi_i, Id) & & \searrow (\varphi_j, Id) \\ \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\quad} & \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} \\ (r, z) & \longmapsto & (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(r), g_{ij}(\varphi_i^{-1}(r)) z) \end{array}$$

$\pi : L \rightarrow X$, les fibres de π sont naturellement des $\mathbb{C}$ -ev
 $[p, z] \mapsto p$ de dimension 1

24/10

Réciproquement, si L est une variété complexe de dimension complexe 2 ;

- * munie d'une application $\pi : L \rightarrow X$ holomorphe surjective
- * munie de trivialisations $\pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\tau_i} V_i \times \mathbb{C}$ (holomorphisme), avec (U_i) recouvrement de X
- * dont les changements de trivialisations

$$\begin{array}{ccc} & \tau_i & \\ & \swarrow & \searrow \\ (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\tau_j^{-1} \tau_i} & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} \end{array}$$

avec τ_j holomorphisme $\mathbb{C}$ -linéaire par rapport à $t \in \mathbb{C}$

avec $\tau_j(z, t) \mapsto (H_{ji}(z), G_{ji}(t, z)) = (\psi_j \circ \psi_i^{-1}(z), g_{ji}(z)t)$

H_{ji} : changement de cartes dans X (holomorphisme)

G_{ji} : $\mathbb{C}$ -linéaire par rapport à t , g_{ji} est une fonction holomorphe partout non nulle

L est donc un fibré holomorphe en droites complexe

Deux fibrés holomorphes en droites complexes (fibrés en droites)

(U_i, g_i) et (U_j, g_j) sont isomorphes s'il existe un recouvrement V_α plus fin que (U_i) , et sur chaque V_α une fonction holomorphe, E_α partout non nulle telle que sur $V_\alpha \cap U_i$

$$E_\alpha g_i \circ \pi^{-1} = g_j \circ \pi^{-1} \quad \forall i, j \mid V_\alpha \subset U_i \text{ et } V_\alpha \subset U_j$$

Remarque : Si (U_α) est un recouvrement plus fin que U_i (tout U_α est inclus dans un U_i), à la donnée (U_i, g_i) on peut associer la donnée $(U_\alpha, g_{i\alpha})$

* Un fibré en droites sur X est la donnée de (U_i, g_i) vérifiant $g_i \circ g_j = g_i$ donc d'un 1-cocycle de Čech à valeurs dans G^* avec G^* le faisceau des fonctions holomorphes partout non nulles

* Un isomorphisme de fibrés en droites est la donnée

de (U_i, ε_i) d'une 0-cochaîne de C_{ext}^0 à valeurs dans G^*

• Les classes d'isomorphismes de fibrés en droites sont donc en bijection avec le quotient

$$\frac{Z^1(U, G^*)}{\text{Im } D_1(C^0(U, G^*))} \rightarrow C^1 \quad \text{ie } H^1_{C_{\text{ext}}^0}(X, G^*)$$

Soit T un espace topologique

(U_i) un recouvrement par des ouverts

A un groupe abélien topologique (B ou $\mathbb{C}$ par ex)

df. Une p -cochaîne de C_{ext}^p est la donnée sur chaque intersection de $(p+1)$ ouverts d'une application continue à valeurs dans A

Un p -cocycle est une p -cochaîne dont le cobord est nul

le cobord $D_1((g_i, \dots, g_{p+1}))$ est une $(p+1)$ -cochaîne

$$(D_1 g)_j = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k g_{j_0, \dots, j_{p+1}} = g_{j_0, \dots, j_{p+1}} - g_{j_1, \dots, j_{p+1}}$$

$$\text{on a } D_1 D_1 = 0$$

On note C^p l'ensemble de p -cochaînes

$$Z^p \subset C^p \quad p\text{-cocycle}$$

Exerc Regarder $p=0$ et $p=1$

L'isomorphisme de (U_i, g_i) avec (U_i, g'_i) correspond à l'existence d'un isomorphisme $L \xrightarrow{\varepsilon} L'$

$$\begin{array}{ccc} & \pi & \\ \downarrow & \times & \downarrow \\ & \pi' & \end{array}$$

$\mathbb{C}$ -linéaire pour les structures d'espaces vectoriels sur les fibres de π et π'

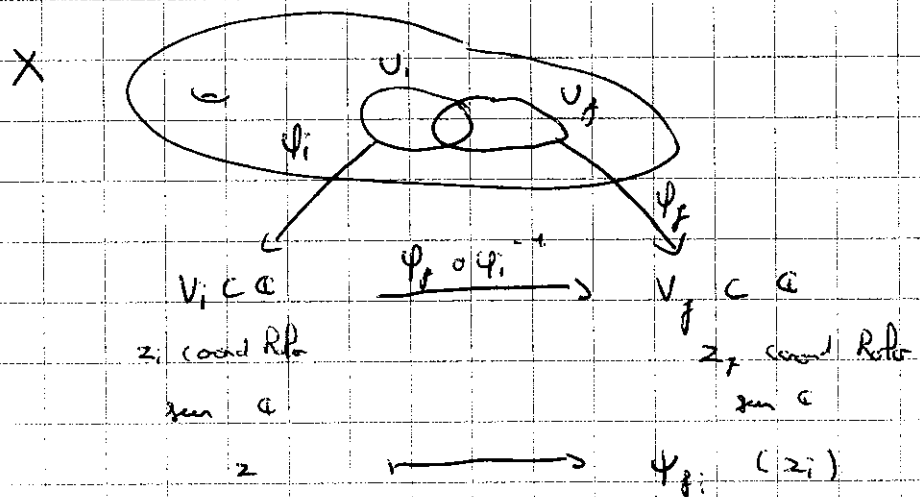
df. Une section holomorphe s d'un fibré en droites (U, g_i) est la donnée sur chaque ouvert U_i d'une fonction holomorphe $\sigma_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ telle que sur chaque $U_i \cap U_j$: $\sigma_i = g_{ij} \sigma_j$

Une section holomorphe s d'un f.b. en droites $L \xrightarrow{\pi} X$ est la donnée d'une application holomorphe $s: X \rightarrow L$ telle que $\pi \circ s = \text{Id}$ ($\forall x \in X$ $s(x) \in L_x$ ou $L_x = \pi^{-1}(x)$).

Exemples: $\pi: \mathbb{C} = (X, \tau)$

Les sections (holomorphes) de $\mathbb{C}$ sont les fonctions holomorphes sur X

$$s: \Omega_X^1 = (U_i, \frac{d(\psi_{f,i})}{dz_i}) \text{ où}$$



c est un cocycle ($g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$).

Les sections holomorphes de Ω_X^1 vérifient:

$$\sigma_i = \frac{d\psi_{f,i}}{dz_i} \sigma_j$$

Soit $v \in TX$

$$(\psi_i)_* v = a_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

$$(\psi_j)_* v = a_j \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{d\psi_{f,i}}{dz_i} a_i \frac{\partial}{\partial z_j}$$

$$(\sigma_i dz_i) (\psi_i)_* v = \sigma_i a_i$$

$$(\sigma_j dz_j) (\psi_j)_* v = \sigma_j \frac{d\psi_{f,i}}{dz_i} a_i = \sigma_i a_i$$

Les sections holomorphes de Ω_X^1 correspondent aux 1-formes

Isomorphismes sur X

Remarque: Si $s = (s_i)$ et $s' = (s'_i)$ sont deux sections holomorphes non nulles de L alors $\frac{s}{s'}$ définit

$$s_i = g_{ij} s_j$$

$$s'_i = g_{ij} s'_j$$

La donnée $(U_i, \frac{s_i}{s'_i})$ correspond à une fonction méromorphe globale sur X

Opérations sur les fibres en droites:

Si $L = (U_i, g_{ij})$ et $L' = (U_i, g'_{ij})$ alors $(U_i, g_{ij} g'_{ij})$ définit un fibré en droites noté $L \otimes L'$

En particulier (U_i, g^R_{ij}) (pour $R \in \mathbb{Z}$) définit un fibré noté L^R (L^{-1} et noté L^* et s'appelle le dual de L)

Si s est une section de L , et s' une section de L' on peut construire une section $s \otimes s'$ de $L \otimes L'$

Diviseurs:

Un diviseur sur une surface de Riemann X compacte est une $\mathbb{Z}$ -combinaison linéaire finie (formelle) de points de X

$$D = \sum_{i=1}^n a_i p_i \quad a_i \in \mathbb{Z} \quad p_i \in X, \quad \deg D = \sum a_i$$

exemple: Si f est une fonction méromorphe sur X

$$\text{div } f := \sum m_i z_i - \sum M_j p_j \quad \text{où } z_i \text{ sont les zéros de } f \text{ avec mult } m_i \text{ et } p_j \text{ sont les pôles de } f \text{ avec mult } M_j$$

Un tel diviseur est dit principal. On remarque que

$$\sum m_i - \sum M_j = 0 = \deg(\text{div } f)$$

proposition: Sur une surface de Riemann compacte à courbure constante on peut associer une classe d'isomorphismes de fibrés

Résonompre en droites complexes noté $[L_D]$ ou bien $[G(D)]$

démonstration: Soit $D = \sum a_i p_i$

Soit (U_α) un recouvrement de X assez fin pour que chaque $U_\alpha \cap \{p_i\}$ soit donné par une équation $p_\alpha = 0$, p_α fonction méromorphe sur U_α

donc $p_\alpha = U_\alpha \cap D$ avec multiplicité
 $(U_\alpha, g_{\beta\alpha} = \frac{p_\beta}{p_\alpha})$ vérifie la relation de cocycle

$\frac{p_\beta}{p_\alpha}$ est Résonompre partout non nulle sur $U_\alpha \cap U_\beta$

La donnée d'un autre recouvrement et d'une autre famille d'équation conduit à un autre fibré en droites isomorphe au précédent $(E_\alpha = \frac{p_\alpha}{p'_\alpha})$

05/11

proposition Sur une surface de Riemann X , on peut associer à chaque diviseur D (une classe d'isomorphisme de) fibré Résonompre en droites complexes $[L_D]$

démonstration Si p_i est une équation de $D \cap U_i$, le cocycle de L_D sur $U_i \cap U_j$ est la fonction Résonompre partout non nulle

$$\frac{p_j}{p_i} = g_{ij}$$

Remarque: Les sections s de L_D correspondent à la donnée de fonctions Résonompre σ_i sur U_i telle que sur $U_i \cap U_j$

$$\sigma_i = \frac{p_j}{p_i} \sigma_j$$

La donnée des $\frac{\sigma_i}{p_i}$ sur U_i vérifie $\frac{\sigma_i}{p_i} = \frac{\sigma_j}{p_j}$ sur $U_i \cap U_j$

fournit donc une fonction méromorphe u_s sur X telle que
 $D = \sum m_i p_i - \sum m_j q_j$ $m_i \geq 0$, $m_j \geq 0$.

u_s n'a des pôles qu'aux points p_i avec mult inférieurs à m_i
 a des zéros d'ordre au moins m_j aux points q_j .

On note alors $\text{div}(u_s) + D \geq 0$
 n'a que des coefficients positifs ou nuls.

Réciproquement, toute fonction méromorphe u sur X telle que
 $\text{div}(u) + D \geq 0$ correspond à une section holomorphe de L_D .

• L'espace $H^0(X, L_D)$ est isomorphe (comme espace vectoriel)
 à l'espace des fonctions méromorphes u sur X telle que
 $\text{div}(u) + D \geq 0$.

Par exemple, si D n'a que des coefficients strictement
 négatifs, L_D n'a pas de sections holomorphes et X est compacte.

• Soit L un fibré en droites et s une section méromorphe de L .

On appelle diviseur de s le diviseur des zéros - diviseurs
 des pôles de s . (cette notion est bien définie car s
 est donnée par des σ_i méromorphe sur U_i et $\sigma_i = g_{ij} \sigma_j$
 sur U_j et g_{ij} est holomorphe partout non nulle).

On note ce diviseur $\text{div}_L s$.

• Si s est une section méromorphe de L_D

$$\text{div}_{L_D} s = \text{div}(u_s) + D$$

$\text{div}(X) = (\text{diviseurs sur } X, +) \xrightarrow{\sim} (\text{classes d'iso de fibrés en droites}, \otimes)$

$$D \mapsto [L_D]$$

Δ est un morphisme de groupes.

Noyau de d Soit $D \in \text{Noyau}(d)$

Il existe un recouvrement (U_i) de X et des fonctions méromorphes partout non nulles ε_i sur U_i telles que sur $U_i \cap U_j$, $\varepsilon_j \frac{p_i}{p_j} \varepsilon_i^{-1} = 1$ $\frac{p_i}{p_j} = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}$ $p_i \varepsilon_j^{-1} = p_j \varepsilon_i^{-1}$

On obtient donc une fonction méromorphe donnée par $p_i \varepsilon_i^{-1}$ telle que $\text{div } u = D$

D est le diviseur d'une fonction méromorphe sur X

(par exemple, si X est compacte, $\deg D = 0$)

Réciproquement, les diviseurs de fonctions méromorphes sont dans $\text{Noyau}(d)$.

Définition : Un diviseur est dit principal s'il est diviseur d'une fonction méromorphe

• Le groupe abélien $(\text{Div}(X) / \text{Div principal})$ s'appelle groupe de Picard de X

deux diviseurs qui diffèrent d'un diviseur principal sont dit linéairement équivalents

prop Si X est une surface de Riemann compacte

$$\text{Pic}(X) \xrightarrow{d} \left\{ \begin{array}{l} \text{classe d'iso} \\ \text{de fibres en droite} \end{array} \right\}$$

Démonstration X est $\mathbb{P}^1$ définie et injective

On admet que sur X tout p, q en droite L possède une section méromorphe non nulle s

$$[K, L] = [K, \text{div } s] \quad \text{donc } X \text{ est surjective.}$$

Degré (X compacte)

• le degré d'un diviseur $D = \sum_{i=1}^N n_i p_i$ est $\sum_{i=1}^N n_i$

(morphisme de groupes)

* La fonction $\deg: \text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ se factorise par
 $\deg: P_c(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ car les diviseurs principaux sont
de degré nul

* Par là on peut donc parler de degré d'un fibré en droites
C'est le degré du diviseur d'une de ses sections méromorphes.
En particulier, un fibré qui admet une section holomorphe
est de degré positif ou nul

Exemple: $\deg \underline{c} = \deg(\text{div } 1) = 0$ (le fibré trivial
est de degré nul).

$\deg \Omega_X^1 = 2g - 2$ nombre de zéros d'une 1-forme
holomorphe (si $g \geq 1$)

Théorème de Riemann - Roch

Si L est un fibré en droites holomorphes sur une surface
de Riemann compacte alors

$$R^0(X, L) - R^1(X, \Omega_X^1 \otimes L^*) = \deg L + 1 - g$$

Remarque: $R^0(X, L) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, L)$ la dimension de l'espace
des sections holomorphes de L .

• Il suffit d'écrire $L = L_D$ où $D = \sum n_i p_i$

Conséquences: Soit L un fibré en droites holomorphes sur X
compactes de genre g .

* Si $\deg L < 0$, L n'a pas de section holomorphe

* Si $\deg L \geq g$, $R^0(X, L) \geq 1$, L admet une
section holomorphe non nulle

* Si $\deg L > 2g - 2$, $R^0(X, L) = \deg L + 1 - g$

(en effet, $\deg \Omega_X^1 \otimes L^* = \deg \Omega_X^1 - \deg L < (2g - 2) - (2g - 2) = 0$)

Plongement projectif d'une surface de Riemann compacte

Théorème Soit L un fibré en droites holomorphe sur une surface de Riemann compacte X

$$\bullet \text{ Si } \deg L > 2g - 1$$

alors pour tout $x \in X$

$H_x = \{ \alpha \in H^0(X, L) \mid \alpha(x) = 0 \}$ est un hyperplan de $H^0(X, L)$

L'application $X \xrightarrow{\phi_L} \mathbb{P}(H^0(X, L))$ l'ensemble des hyperplans de $H^0(X, L)$
 $x \mapsto H_x$
est une application bien définie et holomorphe.

$\bullet$ Si $\deg L > 2g$, alors l'application ϕ_L réalise un plongement de X dans l'espace projectif $\mathbb{P}(H^0(X, L))$

Démonstration $\bullet$ Soit $x_0 \in X$. On cherche une section de L qui ne s'annule pas en x_0 .

$$\deg L > 2g - 2 \text{ donc } R^1(X, L) = \deg L + 1 - g$$

$$\deg L \otimes L_{x_0} = \deg L - 1 > 2g - 2$$

$$\text{donc } R^0(X, L \otimes L_{x_0}) = (\deg L - 1) + 1 - g$$

(L_{x_0} est le fibré associé au div. $-x_0$)

$H^0(X, L \otimes L_{x_0})$ correspond à l'espace des sections holomorphes de L qui s'annulent en x_0 .

Il y a donc une section holomorphe de L qui ne s'annule pas en x_0 .

H_{x_0} est donc bien un hyperplan, ϕ_L est donc bien définie.

$\bullet$ Soit x_0 et x_1 deux points distincts dans X

$H^0(X, L \otimes L_{-x_0})$ correspond à l'espace des sections R.P. de L qui s'annulent en x_0

$$\underline{H^0(X, L \otimes L_{-x_0} \otimes L_{-x_1})}$$

en x_0 et x_1

Comme $\deg L \otimes L_{-x_0} \otimes L_{-x_1} > 2g-2$.

$$R^0(X, L \otimes L_{-x_0} \otimes L_{-x_1}) = R^0(X, L \otimes L_{-x_0}) = 1$$

donc $H_{x_0} \neq H_{x_1}$ ϕ_L est donc injective

* $\deg(L \otimes L_{-2x_0}) > 2g-2$ donc

$$H^0(X, L) \supseteq H_{x_0} = H^0(X, L_{-x_0})$$

$$\supseteq H^0(X, L \otimes L_{-2x_0})$$

Soit $\Delta_0 \in H^0(X, L) - H_{x_0}$

$$\Delta_1 \in H_{x_0} = H^0(X, L \otimes L_{-2x_0})$$

$\Delta_2, \dots, \Delta_M$ une base de $H^0(X, L_{-2x_0})$

$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_M$ est une base de $H^0(X, L)$.

Soit $X_0, \dots, X_M$ les coordonnées homogènes associées à cette base

$$\text{Soit } \Delta \in H^0(X, L) \quad \Delta \text{ s'écrit } \sum_{i=0}^M X_i \Delta_i$$

$$\Delta \in H_{x_0} \Leftrightarrow \Delta(x_0) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^M X_i \Delta_i(x_0) = 0$$

$$X \xrightarrow{\phi_L} \mathbb{P}^N$$

$$x \longmapsto [\sigma_0(x), \sigma_1(x), \dots, \sigma_M(x)]$$

où σ_i est l'expression dans une carte de $\mathbb{P}^N$ ou voisinage de x_0 ϕ_L est donc R-omorphe

$$\phi_L(x_0) = [\sigma_0(x_0), 0, \dots, 0] = [1, 0, \dots, 0]$$

$\sigma_2, \dots, \sigma_M$ s'annule à l'ordre au moins 2 en x_0 et $\sigma'_i(x_0) \neq 0$

donc $d\phi_z(z_0)$ est non nulle et donc injective
 $T_{x_0} X \rightarrow T_{\phi_z(z_0)} \mathbb{P}^n$

14/11

Autour du Théorème d'ABEL

On cherche à caractériser les diviseurs principaux sur une surface de Riemann compacte. On sait qu'il sont de degré nul (ce n'est pas une condition suffisante $\times$ $g(x) \geq 1$ alors $p - q$ est de degré nul mais pas principal)

def: Une fonction méromorphe multiplicative Θ sur X est une fonction méromorphe sur $\tilde{X}$ telle qu'il existe une représentation $\gamma: \pi_1(X, z_0) \rightarrow U_1(\mathbb{C}) = (\{z \in \mathbb{C}^*, |z|=1\}, \times) \subset GL(\mathbb{C})$ qui satisfait à

$$\forall \tilde{z} \in \tilde{X} \quad \forall \gamma \in \pi_1(X, a) \quad \Theta(\tilde{z} + \gamma) = \gamma(\gamma) \Theta(\tilde{z})$$

Rappel: $\tilde{X}$ est le revêtement universel de X

$\tilde{z} + \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma} \cdot \tilde{z}$ (action de $\pi_1(X, a)$ sur $\tilde{X}$)
 = l'extrémité finale du chemin relevé de γ dont l'origine est $\tilde{z}$

Théorème 1) Une fonction méromorphe multiplicative est caractérisée
 a) constante multiplicative puis par son diviseur (dans X)
 2) Tout diviseur de degré nul est le diviseur d'une fonction méromorphe multiplicative

Rem: $\Theta(\tilde{z} + \tilde{\gamma}) = 0 \Leftrightarrow \Theta(\tilde{z}) = 0$ donc div Θ provient d'un diviseur de X

dém: 1) Si Θ et Θ' sont deux fonctions méromorphe multiplicative de même diviseur et soit $P = \frac{\Theta}{\Theta'}$

f est une fonction holomorphe sur $\tilde{X}$ qui ne s'annule pas
 $|f|(\tilde{z} + \tilde{\gamma}) = |f|(\tilde{z})$ car les représentations de Θ et Θ' sont unitaires

$\log |f|$ est une fonction harmonique sur X compacte
 Par principe du maximum $|f|$ est constante
 Par conséquent, f est constante

2) Si D est de degré nul, D s'écrit $D = \sum_{i=1}^N p_i - q_i$
 On traite le cas $D = p - q$ ($\Theta_D = \prod_{i=1}^N \Theta_{p_i - q_i}$)
 On va construire l'analogue de $\frac{z-p}{z-q} = e^{\log \frac{z-p}{z-q}}$

Soit R_{pq} la fonction harmonique sur X comparable à $\frac{1}{2\pi} \log(z-p)$ au voisinage de p et $-\frac{1}{2\pi} \log(z-q)$ au voisinage de q
 Soit $\rho_{pq} = dR_{pq} + i(dR_{pq})^* \sim \frac{1}{2\pi} \left(\frac{dz}{z-p} - \frac{dz}{z-q} \right)$

est une 1-forme méromorphe sur X
 $\pi^* \rho_{pq}$ est une 1-forme méromorphe sur $\tilde{X}$ avec des résidus non nuls

Comme $\tilde{X}$ est simplement connexe, par prolongement analytique il existe une fonction méromorphe w_{pq} sur $\tilde{X}$ à valeurs dans $\mathbb{C}/2\pi i$

On pose $\Theta(\tilde{z}) = e^{2\pi i w_{pq}(\tilde{z})}$ fonction méromorphe bien définie sur $\tilde{X}$ à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ dont le diviseur est $\pi^{-1}(p - q)$

(on a $dw_{pq} = \pi^* \rho_{pq}$). $w_{pq} \sim \log(z-p)$ au voisinage des points de $\pi^{-1}(p)$

$$w_{pq}(\tilde{z} + \tilde{\gamma}) - w_{pq}(\tilde{z}) = \int_{\tilde{\gamma}} dw_{pq} = \int_{\tilde{\gamma}} \pi^* \rho_{pq} = \int_{\gamma} \rho_{pq}$$

$$= \int_{\gamma} dR_{pq} + i \int_{\gamma} (dR_{pq})^* \quad (\gamma \text{ est un lacet et } dR_{pq} \text{ exact: } \int_{\gamma} dR_{pq} = 0)$$

$$= i \int_{\gamma} (dR_{pq})^*$$

donc Θ est multiplicative pour la représentation

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &\rightarrow U(1) \\ \gamma &\mapsto e^{2i\pi \int_\gamma (dR_{P_1})^*} \end{aligned} \quad \pi$$

Lemme: Soit θ une fonction méromorphe multiplicative
alors $\deg \theta$ est de degré nul.

Lemme: La somme des résidus d'une 1-forme méromorphe
sur X compacte est nulle.

démonstration: Soit u une 1-forme méromorphe sur X compacte

Soit $q_1, \dots, q_N$ ses pôles

Soit $\delta_1, \dots, \delta_N$ des petits Pacets autour de q_i

$$\text{res}_{q_i} u = \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta_i} u \quad u = \sum_{R=-m}^{\infty} \frac{a_R}{z^R} dz$$

$$\sum_i \text{res}_{q_i} u = \frac{1}{2i\pi} \sum_{i=1}^N \int_{\delta_i} u_i = \frac{1}{2i\pi} \int_{X-D} u \quad \text{car } D \text{ bord par } \delta$$

Corollaire: 1) A tout diviseur D de degré nul, on peut associer une
représentation unitaire π_D

2) Un diviseur D de degré nul principal si et seulement si
la représentation associée à D est triviale

Plus généralement, la représentation π_D caractérise D à équivalence
linéaire près.

On reprend les formules de réciprocity:

γ en Pacet dans X

w_γ la 1-forme holomorphe associée à la classe d'homologie de $[\gamma]$

$$\text{alors } 2i\pi \int_\gamma (dR_{P_1})^* \equiv 2i\pi \int_P^\gamma w_\gamma \quad [21.7]$$

Théorème d'Abel

On fixe un point $a \in X$

Les points $p_1, \dots, p_N$ sont les zéros et les points $q_1, \dots, q_N$ sont les pôles d'une fonction méromorphe sur X si et seulement si ayant choisis $[\gamma_R]$ Base de $H_1(X, \mathbb{Z})$

$$\forall R = 1, \dots, 2g \quad \sum_{r=1}^N \operatorname{res}_r \int_a^{\gamma_R} \omega = \sum_{i=1}^g \operatorname{res}_{q_i} \int_a^{\gamma_i} \omega \quad [1]$$

Rappel: $\operatorname{res}_r \left(\int_{\gamma_R} \omega \right) = \operatorname{Int}(\gamma_R, \gamma_p) \in \mathbb{Z}$

donc $\operatorname{res}_r \int_a^{\gamma_R} \omega$ ne dépend pas du chemin choisi modulo 1.

Ici $(\omega_R)_{R=1}^{2g}$ est une $\mathbb{R}$ -Base de $H^0(X, \Omega_X^{-1})$.

On cherche à exprimer le Théorème d'Abel à l'aide d'une $\mathbb{C}$ -Base de $H^0(X, \Omega_X^{-1})$.

$$\begin{aligned} \text{Bases de } H^0(X, \Omega_X^{-1}) &= \bigoplus \mathbb{Z} \gamma_i \quad \text{Base quelconque} \\ &= \left(\bigoplus_{i=1}^g \mathbb{Z} a_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^g \mathbb{Z} b_i \right) \\ &\quad \text{Base symplectique} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Mat}(\operatorname{Int}(\gamma_i, \gamma_j)) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

ω_R est une $\mathbb{R}$ -Base de $H^0(X, \Omega_X^{-1})$ $\omega_{2j} = \theta_{j+1} \theta_j^*$

$$\operatorname{res} \int_{\gamma_i} \omega_{2j} = \operatorname{Int}(\gamma_i, \gamma_j) \in \mathbb{Z} \quad \text{matrice anti-symétrique non dégénérée}$$

$$\operatorname{im} \int_{\gamma_i} \omega_{2j} = \Omega(\theta_{\gamma_i}, \theta_{\gamma_j}) \quad \text{matrice définie positive}$$

Théorème: (Relations linéaires de Riemann)

On choisit une Base symplectique (a_i, b_j) de $H_1(X, \mathbb{Z})$

1) On peut choisir une $\mathbb{C}$ -Base de $H^0(X, \Omega_X^{-1})$ telle que

$$\int_{\gamma_R} \omega_j = \delta_{Rj}$$

2) Alors la matrice $(\int_{\mathbb{R}_\varepsilon} \omega_j)$ est symétrique et sa

partie imaginaire est définie positive

On dit que la base (ω_i) est adaptée à la base symplectique

Formules de réciprocity:

On choisit une base symplectique de $H_1(X, \mathbb{Z})$ et une base (ω_i) de $H^0(X, \Omega^1_X)$ adaptée

Soit $(p, q) \in X^2$. Il existe une 1-forme méromorphe ω_{pq} sur X avec des pôles simples en p et q de résidu $+1$ et -1

holomorphe sur $X - \{p, q\}$ et $\int_{\mathbb{R}_\varepsilon} \omega_{pq} = 0$.

alors $\int_{\mathbb{R}_\varepsilon} \omega_{pq} = 2i\pi \int_p^q \omega_R \quad \forall R = 1, \dots, g$

Morphisme d'Abel-Goursat (application d'Abel - Jacobi)

Soit X une surface de Riemann compacte connexe

Soit $a \in X$

$$X \xrightarrow{\alpha} \frac{H^0(X, \Omega^1_X)^*}{\text{image de } H_1(X, \mathbb{Z})}$$

$$x \mapsto [w \mapsto \int_a^x w]$$

Remarque: Si x est un point de X , x fournit $w \mapsto \int_a^x w$ élément de $H^0(X, \Omega^1_X)^*$

qui ne dépend que de $[x] \in H_1(X, \mathbb{Z})$

car les 1-formes holomorphes sur X sont d-ferrmées

Modulo $\text{Im } H_1(X, \mathbb{Z})$ $w \mapsto \int_a^x w$ ne dépend pas du chemin choisi de a à x et est donc bien définie

Lemme: L'image de $H_1(X, \mathbb{Z})$ dans $H^0(X, \Omega^1_X)^*$ est un réseau appl. réseau

(un $\mathbb{Z}$ -module discret de rang maximal égal à $\dim_{\mathbb{R}} H^0(X, \Omega^1_X) = 2g$)

• Donc $\frac{H^0(X, \Omega^1_X)^*}{\text{Im } H_1(X, \mathbb{Z})}$ est un tore complexe compact

appelée variété d'Albanese de X ou Jacobienne de X

défini On choisit une base symplectique de $H_1(X, \mathbb{Z})$

(a_i, b_i) et (w_i) base de $H^0(X, \Omega_X^1)$ adaptée

L'image Λ de $H_1(X, \mathbb{Z})$ dans $H^0(X, \Omega_X^1)^* \simeq \mathbb{C}^g$ par le choix de la base (w_i) est engendrée par

$$\begin{pmatrix} \int_{a_1} w_i \\ \int_{b_1} w_i \\ \vdots \\ \int_{w_1} w_i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^g \quad \xrightarrow{p_j} \begin{pmatrix} \int_{a_j} w_i \\ \vdots \\ \int_{a_g} w_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_{b_j} w_i \\ \vdots \\ \int_{b_g} w_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{b_j} w_i \\ \vdots \\ \int_{b_g} w_i \end{pmatrix}$$

On a $\text{Im} \left(\int_{b_j} w_i \right)$ défini positif

donc les $2g$ générateurs de Λ sont $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants

Rappel : On a une dualité $H_1(X, \mathbb{R}) \times H_{\text{dR}}^1(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$[\gamma] \cdot u \mapsto \int_\gamma u$$

donc un isomorphisme $H_1(X, \mathbb{R}) \rightarrow H_{\text{dR}}^1(X, \mathbb{R})^*$

Les 1-formes holomorphes sont fermées

Leurs conjuguées aussi $(\int \gamma(z) dz = \overline{\int \gamma(z) d\bar{z}})$

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, \Omega_X^1) \oplus \overline{H^0(X, \Omega_X^1)} & \rightarrow & H_{\text{dR}}^1(X, \mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \gamma & \mapsto & [\gamma + \bar{\gamma}] \end{array}$$

Si γ est une 1-forme holomorphe exacte alors γ est nulle.

On a donc un isomorphisme $H_{\text{dR}}^1(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\text{isomorph.}} H^0(X, \Omega_X^1) \oplus \overline{H^0(X, \Omega_X^1)}$
(décomposition de Hodge)

La différentielle de l'application $\alpha: X \rightarrow \frac{H^0(X, \Omega_X^1)^*}{\text{im } H_1(X, \mathbb{Z})}$

$$\begin{array}{ccc} d\alpha_x: T_{x_0} X & \rightarrow & T_{\alpha(x_0)} \left(\frac{H^0(X, \Omega_X^1)^*}{\Lambda} \right) \simeq H^0(X, \Omega_X^1)^* \\ \alpha & \mapsto & \left(\begin{array}{ccc} H^0(X, \Omega_X^1) & \rightarrow & \mathbb{C} \\ w & \mapsto & w(v) \end{array} \right) \end{array}$$

est $\mathbb{C}$ -linéaire car les 1-formes holomorphes sont $\mathbb{C}$ -linéaires $(\int \gamma(z) dz)$
donc α est holomorphe

On considère le sous-réseau de $H^0(X, \Omega_X^*)^*$ des formes linéaires sur $H^0(X, \Omega_X^*)$ qui prennent des valeurs entières sur les formes harmoniques de w_{σ_R} associées aux bases d'homologies $[\sigma_R]$ bases de $H_1(X, \mathbb{Z})$.

$$\Lambda \subset \Lambda_0, \text{ pour } \gamma \in H_1(X, \mathbb{Z})$$

$$\int_{\gamma} w_{\sigma_R} = \text{Int}(\gamma, \sigma_R) \in \mathbb{Z}$$

$$X \xrightarrow{\alpha} \text{Jac}(X) = \frac{H^0(X, \Omega_X^*)^*}{\Lambda} \xrightarrow{p} \frac{H^0(X, \Omega_X^*)^*}{\Lambda_0}$$

Comme $\text{Jac}(X)$ et $\frac{H^0(X, \Omega_X^*)^*}{\Lambda_0}$ sont des groupes additifs,

on peut étendre α en une application

$$S^n X \xrightarrow{\alpha} \text{Jac}(X) \xrightarrow{p} \frac{H^0(X, \Omega_X^*)^*}{\Lambda_0}$$

$$(p_1, \dots, p_n) \mapsto \alpha(p_1) + \dots + \alpha(p_n) \mapsto$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha(p_i) = \left(\sum_{i=1}^n \int_{\alpha}^{p_i} w_{\sigma_R} \right)_{1 \leq R \leq g} \in \mathbb{C}^g / \mathbb{Z}^{2g}.$$

Reformulation du Théorème d'ABE

$$\sum_{i=1}^n p_i \xrightarrow{p.m.} \sum_{i=1}^n q_i \Leftrightarrow (p \circ \alpha)(\sum p_i) = (p \circ \alpha)(\sum q_i).$$

On va montrer qu'en fait $\sum p_i \xrightarrow{p.m.} \sum q_i$ si et seulement si $\alpha(\sum p_i) = \alpha(\sum q_i)$.

• Si $\alpha(\sum p_i) = \alpha(\sum q_i)$ alors $\sum p_i \xrightarrow{p.m.} \sum q_i$

• Si $\sum p_i \xrightarrow{p.m.} \sum q_i$, soit $f \in \mathcal{F}(X)$ telle que

$$\text{div } f = \sum p_i - \sum q_i$$

$$\frac{df}{f} = \sum w_{p_i, q_i} \quad \text{une 1-forme différentielle sur } X$$

ω_{P_i, q_i} 1-forme méromorphe

$$\text{res}_{P_i} \omega_{P_i, q_i} = 1$$

$$\int_{\alpha_2} \omega_{P_i, q_i} = 0$$

$$\text{res}_{q_i} \omega_{P_i, q_i} = -1$$

$$\exists c_R \in \mathbb{C} \quad \frac{dP}{P} = \sum \omega_{P_i, q_i} + \sum_{R=1}^g c_R \omega_R$$

$$2\pi i \ni \int_{\alpha_R} \frac{dP}{P} = \sum_i \int_{\alpha_R} \omega_{P_i, q_i} + c_R = c_R$$

$$2\pi i \ni \int_{\beta_R} \frac{dP}{P} = \sum_i \int_{\beta_R} \omega_{P_i, q_i} + \sum_{P=1}^g c_P \int_{\beta_R} \omega_P$$

$$= \sum_i 2\pi i \int_{P_i}^{q_i} \omega_R + \sum c_P \int_{\beta_R} \omega_P$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha(q_i) - \sum_{i=1}^n \alpha(p_i) \right)_R = - \sum_P \frac{c_P}{2\pi i} \int_{\beta_R} \omega_P + \eta_P \left(\int_{\alpha_2} \omega_P \right)$$

$$\text{donc } \alpha(\sum p_i) - \alpha(\sum q_i) \in \Lambda$$

19/11

Propriétés de l'application d'AGP Jacobien

prop. Si X est une surface de Riemann compacte de genre $g > 0$, alors $\alpha: X \rightarrow \text{Jac}(X)$ est un plongement de X dans une tore complexe.

Dém. $\text{Jac}(X) = \frac{H^0(X, \Omega_X^1)^*}{\text{Im } H_1(X, \mathbb{Z})}$ et $\text{Im } H_1(X, \mathbb{Z})$ est un réseau

(soit groupe discret de rang maximal $2g$ de $H^0(X, \Omega_X^1)^*$)
généralisation de $\mathbb{C}^g / \mathbb{Z}^{2g} = (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^g$

En général, $\text{Jac}(X)$ n'est pas isomorphe comme tore complexe à $\mathbb{C}^g / \mathbb{Z}^{2g}$.

α est holomorphe, de différentielle $(d\alpha)_x: T_x X \rightarrow T_x \text{Jac}(X)$

$$\begin{array}{c} \mathbb{R} \\ H^0(X, \Omega_X^1)^* \\ \pi \mapsto \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}^g \end{array}$$

De plus pour tout $x_0 \in X$ il existe une 1-forme Rémannienne
 1 qui ne s'annule pas en x_0 .
 Ainsi, $(dx)_{x_0} \neq 0$ $(dx)_{x_0}$ est injective car $T_{x_0}X$ est
 de dimension 1.

$$R^0(X, \Omega^1_X) - R^0(X, \Omega^1_X \otimes L_{-x_0}) = R^0(X, \mathbb{C}) - R^0(X, L_{x_0}) = 1 - \dim H^0(X, L_{x_0}) = 1 - 1 = 0$$

Il y a donc une 1-forme Rémannienne qui ne s'annule pas en x_0 .

Injectivité: Si $\alpha(x_0) = \alpha(x_1)$
 par le théorème d'Abel, le diviseur $x_0 - x_1$ est principal
 comme $g(X) > 0$, cela implique $x_0 = x_1$ $\#$

prop: Si $g \geq 1$, $\alpha: X \rightarrow \text{Jac}(X)$ est un isomorphisme

dém: $\text{Jac}(X)$ est un tore complexe de dimension 1, donc une
 surface de Riemann connexe.

Comme X est compacte, et α (injective) non constante, α
 est surjective.

donc α est un isomorphisme

Toutes les surfaces de Riemann compactes connexes de genre 1,
 sont isomorphes à des tores complexes de dim 1 $\#$

Théorème d'inversion d'Abel Jacobi

L'application $\alpha_g: \text{Div}_g(X) \rightarrow \text{Jac}(X)$ induit un
 isomorphisme de $\text{Div}_0(X) \rightarrow \text{Jac}(X)$
 Démonstration:

dém: $\text{Div}_g(X)$ diviseurs de degré g

On fixe un point base P_0 sur X

$$\alpha: X \rightarrow \text{Jac}(X) \\ P \mapsto \int_{P_0}^P \text{ mod } \Lambda \quad \text{où } \Lambda = H_1(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^0(X, \Omega^1_X)$$

$$\alpha_m: \sum_{i=1}^m X \rightarrow \text{Jac}(X)$$

$$\sum_{i=1}^m P_i \mapsto \sum_{i=1}^m \alpha(P_i) = \int_{P_0}^{P_1} + \int_{P_0}^{P_2} + \dots + \int_{P_0}^{P_m}$$

Le Théorème d'AGel dit que $\sum_{i=1}^m P_i \sim \sum_{i=1}^m Q_i \Leftrightarrow \alpha(\sum P_i) = \alpha(\sum Q_i)$

Donner sur une surface de Riemann de genre g , tout diviseur de degré g est linéairement équivalent à un diviseur effectif.

donc D de degré g .

$$h^0(X, \mathcal{L}_D) \geq \deg D + 1 - g \geq 1$$

Il existe donc $P \in \mathcal{L}(X)$ telle que $\deg P + D \geq 0$
 linéairement équivalent à D

On peut donc définir $\frac{\text{Div}_g(X)}{\text{Equivalence linéaire}} \rightarrow \text{Jac}(X)$

Si $D \in \text{Div}_g(X)$

$\exists E \geq 0, D \sim E$

$$E = \sum_{i=1}^r P_i \mapsto \alpha(E)$$

$\text{Div}_g(X) \rightarrow \text{Div}_0(X)$

$D \mapsto D - gP_0$

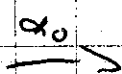
Si $D \sim D'$, alors $(D - gP_0) \sim (D' - gP_0)$

$\frac{\text{Div}_g(X)}{\text{Equivalence linéaire}}$



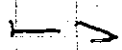
$\frac{\text{Div}_0(X)}{\text{Div principal}}$

$\frac{\text{Div}_0(X)}{\text{Div principal}}$



$\text{Jac}(X)$

δ



$\alpha(\delta + gP_0)$

α_0 est injective par le Récursif d'AGE

$$\text{Si } \alpha_0(\delta) = \alpha_0(\delta'), \quad \alpha_g(\delta + gP_0) = \alpha_g(\delta' + gP_0)$$

donc par le théorème d'Abel

$$\delta + \rho \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^{n-2}} dx = \delta + \rho \cdot \frac{4\pi}{n-2} = \delta + \rho \cdot \frac{4\pi}{2} = \delta + 2\rho$$

donc $S - S'$ est principal

classe α : $\frac{\text{Dir.}(x)}{\text{Dir. principale}} \rightarrow \text{Jac}(X)$ est injective

Pour montrer la surjectivité de α , on choisit un diviseur

$D = P_1 + \dots + P_g$ de degree g tal que

$$H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L) = 0$$

(Les 1-formes sur les courbes points P_i sont nulles.)

Es existiert ein $f \in D$ mit $R^0(x, \Omega^1 x) = g$.

Soit $\gamma_1 = \gamma_2$ une base de $H^0(X, \Omega^1_X)$.

$$\text{div}|_1 = P_1 + \dots + P_{2g-2} \quad (\deg \mathcal{O}_X^1 = 2g-2)$$

$$\text{Sei } D = \sum p_i \quad H^0(X, D_x^-) \xrightarrow{\text{ev}_0} \mathbb{C}^r$$

$$| \quad \quad \quad \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(p_1) \\ \vdots \\ \gamma_g(p_g) \end{pmatrix}$$

ou $\int_{\frac{p_0}{2}}^{\frac{p_0}{2}} \eta_1(z) dz$ au voisinage de p

Affirmation: pour tout $\mathcal{D}$ générique de $\mathcal{P}_1$ deux à deux distincts, $e_{\mathcal{D}}$ est un isomorphisme. (admis).

On choisit des coordonnées t_i relatives au voisinage de P_i .

On écrit une GPE normalisée w_R de $\pi^0(x, \Omega_x)$

$$\text{comm} \quad \omega_R \quad \int_R \gamma_i(t_i) dt_i$$

L'application α_g est décrite au rendez-vous de la SD, par :

$$(F_1, \dots, F_g) \mapsto \alpha_g(0) + \left(\sum_{i=1}^g \int_0^{T_i} \gamma_R^i(x_i) dx_i \right) \quad \text{for } g \geq 1$$

La différentielle $d\alpha_{(0,-,0)}$ de cette application a pour matrice

$$[\gamma_i^j(u)]_{1 \leq i, j \leq g}$$

Comme $H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L_{-g}) = 0$ cette matrice est inversible.
 α_g est un Géomorphisme Local au voisinage de $(0, -, 0)$.

Soit $c \in H^0(X, \Omega_X^1)^*$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\alpha_g(0) + \frac{c}{N} \in \alpha_g(0)$$

Il existe $(Q_1, \dots, Q_g) \in U$ tel que

$$\alpha_g(Q_1, \dots, Q_g) = \alpha_g(0) + \frac{c}{N}$$

$$c = N [\alpha_g(\sum Q_i) - \alpha_g(\sum P_i)]$$

$gP_0 + N \sum Q_i - N \sum P_i$ est de degré g et localement équivalent à un diviseur effectif. E

Il existe $f \in \mathcal{M}(X)$ tel

$$E - [gP_0 + N \sum Q_i - N \sum P_i] = \text{div } f$$

$$\underbrace{\alpha(E + N \sum P_i)}_{\text{effectif}} = \underbrace{\alpha(gP_0 + N \sum Q_i)}_{\text{effectif}}$$

$$\alpha(E) + N \alpha(\sum P_i) = N \alpha(\sum Q_i) \quad \text{car } \alpha(P_0) = 0.$$

$$\text{donc } c = \alpha_g(E)$$

donc α_g est surjective.

donc α_0 est surjective. c' est donc un isomorphisme de groupes.

21/11

Chap VIIIUniformisationThéorème (Uniformisation de Riemann)

Toute surface de Riemann connexe et simplement connexe est
 biholomorphe à l'un des modèles : $\mathbb{D}^1$, $\mathbb{C}$, Δ (disque unité dans $(\mathbb{C}, 11)$)

Remarque: Même si biholomorphisme puis ces trois modèles sont différents
 (Δ admet des fonctions holomorphes bornées non constantes, $\mathbb{D}^1$ et $\mathbb{C}$ non).

Proposition: Soit D un ouvert connexe et simplement connexe
 de $\mathbb{D}^1 \setminus \{0\}$, alors D admet une fonction holomorphe
 bornée non constante.

Démonstration: On choisit un repère projectif de $\mathbb{P}^1$ tel que
 $0 = [0, 1, 1]$ et $\infty = [1, 0, 0]$

La fonction $\frac{1}{2} \log \left| \frac{x}{y} \right|$ sur D est bien définie à valeurs
 réelles et est harmonique car $\frac{x}{y}$ est holomorphe
 sur D .

Comme D est simplement connexe ($D \subset \mathbb{C}$)

il existe une fonction f sur D telle que

$$\frac{1}{2} \log \left| \frac{x}{y} \right| = \log |f(z)| \quad \text{avec } z = \frac{x}{y}$$

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right|^2 = 1 \quad \text{sur } D. \quad \text{Donc il existe } \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que}$$

$$f(z)^2 = e^{i\theta} z$$

$$\text{On pose } g(z) = e^{-\frac{i\theta}{2}} f(z) \quad \text{on a } g(z)^2 = z$$

$$\text{Soit } a \in D \quad \text{et } b = g(a) \quad \text{avec } b \neq 0$$

Montrons que g ne prend pas la valeur $-b$

$$\text{Si } c \in D \quad \text{vérifie } g(c) = -b, \quad g(c)^2 = c = (-b)^2 = b^2 \\ = g(a)^2 = a$$

mais $g(\infty) = \infty \neq -\infty$

donc il existe un voisinage de $-\infty$ qui n'est pas atteint par g .

en prenant $\frac{1}{g(z)+R}$ on obtient une application qui

est sur un voisinage de ∞

c'est une application holomorphe bornée sur D non constante $\neq$

On a vu que toute surface de Riemann compacte connexe
pourrait être réalisée comme quotient d'une surface de
Riemann simplement connexe (revêtement universel $\tilde{X}$) par
un groupe de transformations de $\tilde{X}$ qui agit sans point fixe
et proprement discontinuement, isomorphe à $\pi_1(X, x_0)$

Résumé des transformations des surfaces de Riemann
simplement connexes $\mathbb{A}^n$

$$1. \text{Aut}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) = \text{PSL}_2(\mathbb{C}) = \text{SL}_2(\mathbb{C}) / \pm I = \text{PGL}_2(\mathbb{C})$$

$$2. \text{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \right\}$$

$$3. \text{Aut}(\Delta) = \text{PSL}_2(\mathbb{R})$$

démonstration

2. Soit $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ entière qui envoie
un voisinage de l'infini sur un voisinage de l'infini (biholomorphisme)
En regardant f dans $\mathbb{P}^1$ on voit que f est nécessairement
un polynôme. Comme f est injective, elle est de degré 1

1. Soit $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$. Il existe $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ tel que
$$f: [X, Y] \mapsto [aX + bY, cX + dY] \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad z = \frac{X}{Y}$$

on a $p(\infty) = \infty$ $p_0(\infty) = \infty$
 donc $(p_0 \circ p)$ se restreint en un automorphisme de $\mathbb{C} = \mathbb{P}^1 - \{0, 1\}$
 donc $p \in SL_2(\mathbb{C})$

$\psi: SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ est un morphisme
 $\gamma \mapsto p_\gamma$
 de groupe modulaire
 Rem $\psi = \{\pm \text{Id}\}$

3. Modèle de Δ

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$$

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im } z > 0\}$$

$$\mathbb{H}_0^1 = \{[X, Y] \in \mathbb{P}^1 \mid q(X, Y) < 0\}$$

$$\text{on } q\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = X\bar{X} - Y\bar{Y} = |X|^2 - |Y|^2$$

avec q la forme quad dont la forme hermitienne
 est $h\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix}\right) = X\bar{X} - Y\bar{Y}$ régulière $h(R) = (1, 1)$

On vérifie que ces espaces sont biholomorphes.

$$\mathbb{H} \rightarrow \Delta$$

$$\mathbb{H}_0^1 \rightarrow \Delta$$

$$t \mapsto \frac{t-1}{t+1} = z$$

$$[X, Y] \mapsto \frac{X}{Y}$$

$$\frac{(1+i)}{1-i} \mapsto z$$

#

Definition: Une transformation de Möbius est une application
 de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ vers $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ de la forme $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$

$$\text{avec } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$$

$\Delta \subset \mathbb{C}$ les transformations de Möbius qui sentent Δ sont

de la forme $e^{i\theta} \frac{z+a}{\bar{a}z+1}$

$\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$: les transformations de Möbius qui conservent $\mathbb{H}$ sont les éléments de $SL_2(\mathbb{R})$

Lemme (de Schwarz)

Soit $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ alors pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$

$$\frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{|f(z_1) - \bar{f(z_2)}|} \leq \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z_2}|} \quad \text{et} \quad \frac{|f'(z)|}{I_n(f(z))} \leq \frac{1}{I_n(z)}$$

En cas d'égalité pour $z_1 + z_2$ on a $f(z) = z$ pour $z \in \mathbb{H}$ ou $f \in SL_2(\mathbb{R})$

On revient à la preuve: $\text{Aut}(\Delta) \cong \text{Aut}(\mathbb{H}) = \text{PSL}_2(\mathbb{R})$

On vérifie que $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathbb{H}$

$\exists z_1, z_2 \in \mathbb{H}, \exists \gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{R}) \mid \gamma(z_1) = z_2$

Soit $f \in \text{Aut}(\mathbb{H})$, il existe $\gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$

tel que $\gamma \circ f$ envoie i sur i

$$\frac{|(\gamma \circ f)'(i)|}{1} \leq \frac{1}{1}$$

Mais $(\gamma \circ f)^{-1}$ est une application de $\mathbb{H}$ vers $\mathbb{H}$ qui envoie i sur i

$$1 \leq |(f \circ \gamma^{-1})'(i)| = |(f \circ \gamma^{-1})'(i)|^{-1} \leq 1$$

donc $f \circ \gamma \in SL_2(\mathbb{R})$ et par conséquent $f \in SL_2(\mathbb{R})$

Théorème: Une surface de Riemann X admet $\mathbb{C}$ comme revêtement universel si et seulement si elle est biholomorphe à $\mathbb{C}$.
 $\mathbb{C} / \Gamma \cong \mathbb{C}^*$ où Γ est un tore complexe Γ compact de dimension 1.

démonstration:

• par définition Γ est le quotient de $\mathbb{C}$ par un réseau.

• $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$
 $z \mapsto e^z$
 $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{C}$.

• Réciproquement, soit $\Gamma \subset \text{Aut}(\mathbb{C})$ tel que $X = \mathbb{C}/\Gamma$.
 Si $f: z \mapsto az + b$ appartient à Γ
 f admet sans point fixe sur $\mathbb{C}$, donc $a \neq 1$.

Γ ne contient que des translations

$\{ \theta \mid (z \mapsto z + \theta) \in \Gamma \}$ est un sous-groupe discret car l'action est proprement discontinue.

donc $\Gamma = \{ \text{Id} \}$ $X = \mathbb{C}$

$\Gamma = \langle \theta \rangle$ $\theta: z \mapsto z + \omega$ $X = \mathbb{C} / \langle \theta \rangle$

$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$
 $z \mapsto e^{2\pi i z / \omega}$

$\downarrow$
 $\mathbb{C}/\Gamma \xrightarrow{\text{biholo}} \mathbb{C}^*$

$\Gamma = \langle \theta_1, \theta_2 \rangle$ $\theta_1: z \mapsto z + \omega_1$ $\theta_2: z \mapsto z + \omega_2$

avec ω_1 et ω_2 $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants.

$X = \mathbb{C} / \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ Γ complexe compact

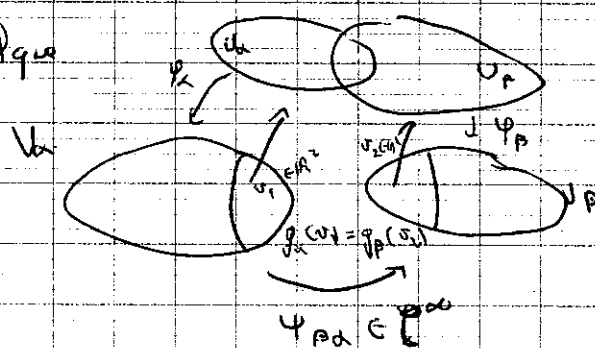
Métrique Riemannienne sur une surface différentiable M

Une métrique riemannienne g sur une surface différentiable M est la donnée d'un recouvrement $(U_\alpha, \varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^2)$ par des ouvertés de cartes et la donnée sur chaque V_α d'un produit scalaire dont les coefficients dépendent de manière différentiable du point.

$$\mathbb{R}^2 \supset V_\alpha \quad g_\alpha(x, y) = g_{11}(x, y) dx \otimes dx + 2g_{12}(x, y) dx \otimes dy + g_{22}(x, y) dy \otimes dy$$

$$g_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(V_\alpha, \mathbb{R}) \quad \forall (x, y) \in V_\alpha \quad \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \text{ défini positif}$$

et tel que



$$(x, y) \mapsto \varphi_{\beta\alpha}(x, y) = (x'(x, y), y'(x, y))$$

$$g^\alpha(x, y) = (\varphi_{\beta\alpha}^* g^\beta)(x, y)$$

En coordonnées, la relation de compatibilité devient

$$g_{11}^\alpha(x, y) dx^2 + 2g_{12}^\alpha(x, y) dx \otimes dy + g_{22}^\alpha(x, y) dy^2$$

$$= g_{ij}^\beta(x'(x, y), y'(x, y)) \left[\frac{\partial x^i}{\partial x} dx + \frac{\partial x^i}{\partial y} dy \right]$$

$$\otimes \left[\underbrace{\varphi_{\beta\alpha}^* dx^j}_{dx^j} \right]$$

$$= \underbrace{\left[g_{11}^\beta \left(\frac{\partial x^1}{\partial x} \right)^2 + 2g_{12}^\beta \frac{\partial x^1}{\partial x} \frac{\partial x^2}{\partial x} + g_{22}^\beta \left(\frac{\partial x^2}{\partial x} \right)^2 \right]}_{g_{11}^\alpha(x, y)} dx^2 + \dots$$

$$\int (\varphi_{\alpha}^* dx') \cdot v = dx' \cdot (\varphi_{\alpha})_* v = dx' \cdot d\varphi_{\alpha}(v)$$

Théorème de Gauss:

Soit (M, g) une surface différentiable munie d'une métrique riemannienne. Alors (M, g) peut être recouverte par des ouvertés de carte munies de coordonnées dans lesquelles la métrique g s'écrit:

$$g(x, y) = \lambda(x, y) \underbrace{[dx^2 + dy^2]}_{\text{métrique euclidienne plate}}$$

métrique conformément plate

Soit maintenant M une surface différentiable riemannienne orientée. On choisit un recouvrement comme dans le théorème de Gauss en supposant de plus que la base $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ est directe dans TM.

Alors les cartes

$$\begin{aligned} U_{\alpha} &\rightarrow V_{\alpha} \rightarrow \mathbb{C} \\ m &\mapsto \varphi_{\alpha}(m) \mapsto z_{\alpha} + i y_{\alpha} \end{aligned}$$

sont telles que la différentielle des changements de carte sont des similitudes directes (composée d'une rotation avec une isométrie directe), donc des multiplications par un nombre complexe. Les changements de cartes sont holomorphes.

Ainsi M est munie d'une structure de surface de Riemann.

Soit X une surface de Riemann, on prend (U_α) un recouvrement par des ouverts de cartes holomorphes et $(\rho_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité subordonnée à U_α

ρ_i une fonction C^∞ à support compact dans l'un des U_α

$$\sum_i \rho_i = 1$$

(X est paracompact)

On pose $g = \sum_{i \in I} \rho_i \otimes dz \otimes d\bar{z}$

$$\begin{aligned} dz &= dx + i dy \\ d\bar{z} &= dx - i dy \end{aligned}$$

$$dz \otimes d\bar{z} = \underbrace{dx \otimes dx + dy \otimes dy}_{\text{se } (dx \otimes dx + dy \otimes dy)} + i(-dx \otimes dy + dy \otimes dx)$$

g est une métrique riemannienne conformément plate

Les choix faits dans cette construction changeant g en une métrique conforme

(par def g et g' sont conformes si il existe $\rho \in C^\infty(M, \mathbb{R}^+)$ / $g' = \rho g$)

Si M est une surface différentiable orientée

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{classes conformes de} \\ \text{métriques riemanniennes } C^\infty \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{structures complexes sur } M \\ \text{compatibles avec l'orientation et} \\ \text{la structure différentiable} \end{array} \right\}$$

$$(M, g) \longmapsto [g_X]$$

$$\begin{array}{c} \text{Goursat} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \text{surface de Riemann} \\ X \end{array}$$

$$\xleftarrow{\quad} \text{partition de l'unité}$$

Métriques hermitiennes sur une surface de Riemann

C'est la donnée d'un produit $I_{\text{geom}} - \text{Hermitien}$ sur chaque $T_x X \simeq \mathbb{C} X$ dont les coefficients dépendent de manière C^∞ de x
 $(T_x X, I_{\text{geom}})$ est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dim 1
 (Hermitien) sesquilineaire, définie, positive.

$$\begin{aligned} dz &: (TX, J_{\text{geom}}) \longrightarrow (C, i) \text{ est linéaire} \\ d\bar{z} &: (TX, J_{\text{geom}}) \longrightarrow (C, i) \text{ est anti-linéaire} \end{aligned}$$

Localement, la métrique Hermitienne R s'écrit $R = \lambda(z) dz \otimes d\bar{z}$
 $\lambda \in C^\infty(V_\alpha, \mathbb{R}^+)$

Par changement de cartes $\psi: U_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} U_\beta$

$$(\psi^* R^\beta) = \lambda^\beta \left| \frac{\partial \psi}{\partial z_\alpha} \right|^2 dz_\alpha \otimes d\bar{z}_\beta \quad (R^\beta = \lambda^\beta dz_\beta \otimes d\bar{z}_\beta)$$

$$\text{donc } \lambda^\alpha(z) = \lambda^\beta(\psi_\beta(z)) \underbrace{\left| \frac{\partial \psi}{\partial z_\alpha} \right|^2}_{\text{module au carré d'une fonction holomorphe}}$$

module au carré d'une fonction holomorphe

Définition La courbure de la métrique Hermitienne R sur X en un point x_0 est $K = - \frac{2}{\lambda^\alpha} \frac{\partial^2}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\alpha} \log \lambda^\alpha$

Vérification Si f est une fonction holomorphe partout non nulle sur un ouvert de $\mathbb{C}$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log |f|^2 = 0 \quad (\text{car } |f|^2 = f\bar{f} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log \left[\lambda^\beta(\psi(z)) \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|^2 \right] \quad z = z_\alpha$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log \lambda^\beta(\psi(z))$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log \lambda^\alpha(z) = \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log \lambda^\beta \right) (z^-) \quad z^- = \psi(z)$$

$$\frac{1}{\lambda^\alpha} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log \lambda^\alpha = \frac{1}{\lambda^\beta} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log \lambda^\beta$$

La quantité $i\pi \lambda dz \wedge d\bar{z} = -2i \partial \bar{\partial} \log \lambda$ est une (1,1) forme

différentielle sur X Bien définie Θ

$$\Gamma \psi^* dz \wedge d\bar{z} = \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|^2 dz \wedge d\bar{z}$$

C'est une (1,1)-forme d-ferrée ($d\Theta = 0$)
 Localement d-exacte

Si $R \cong \mathbb{C} \ni dz \otimes d\bar{z}$ alors $K=0$, $\Theta=0$ sur U_α .

Soit ϕ une 1-forme méromorphe sur X ($x, y(x) \geq 1$ holomorphe)

$\phi \cong a(z) dz$ avec $a(z)$ fonction holomorphe.

$$i \phi \wedge \bar{\phi} = |a(z)|^2 i dz \wedge d\bar{z}, \quad i dz \wedge d\bar{z} = 2 dx \wedge dy$$

par exemple $i \phi \wedge \bar{\phi} = i \phi \wedge \bar{\phi}$ forme réelle

$$\int_X i \phi \wedge \bar{\phi} = \int_X 2 |a(z)|^2 dx dy \geq 0$$

On pose $f = \log \frac{\lambda_\alpha}{|a_\alpha(z)|^2}$ est une fonction bien définie et C^∞
 sur $X - \text{Zéro}(\phi)$.

Δ_i petit disque autour de p_i , p_i zéro de ϕ . (orienté dans le sens direct)

$$\int_{X - \Delta_i} -2i \bar{\partial} \bar{\partial} f = \int_{X - \Delta_i} \Theta$$

$$-2i \int_{X - \Delta_i} d(\bar{\partial} f) \quad \text{car } \bar{\partial} \bar{\partial} f = 0, \quad d = \partial + \bar{\partial}$$

$$2 \sum_{i \in \Delta_i} \int i \bar{\partial} f$$

Au voisinage de p_i $a_\alpha(z) = z^m A_\alpha(z)$ où $A_\alpha(p_i) \neq 0$

$$i \bar{\partial} f = \bar{\partial} \log \frac{1}{|z|^2 |A_\alpha(z)|^2} = \frac{1}{z} +$$

Δ est paramétrisé par $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $z = a e^{i\theta} + p$,
 $\frac{dz}{z} = -i d\theta$ sur Δ ,

$$\int_{\Delta} \log |z|^2 = m \int_{\Delta} \frac{dz}{z}$$

$$i \int_{\Delta} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{dz}{z} = m \int_{\Delta} d\theta$$

$$\lim_{a(\Delta) \rightarrow \infty} \int_{\Delta} i \frac{dz}{z} = -m \cdot 2\pi$$

On obtient $\int_X \Theta = -2 \cdot 2\pi$ (nombre de zéros de ψ comptés avec multiplicité)
 $= -4\pi (2g - 2)$.

Théorème de Gauss-Bonnet

(X, A) surface de Riemann compacte avec une métrique Rémittienne R

Θ la 2-forme de courbure de R

alors $\int_X \Theta = 4\pi (2 - 2g)$.

Métrique Rémittienne à courbure constante

• Sur $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, on considère la métrique Rémittienne R donnée par $\frac{4 |dz|^2}{(1+|z|^2)^2}$ $K = \frac{4}{(1+|z|^2)^2}$

On peut vérifier que $K = +1$

• Sur $\mathbb{C}$, on considère la métrique Rémittienne $|dz|^2 = dz \otimes d\bar{z}$
 $K = 0$

• Sur $\mathbb{H}$, on considère la métrique $\frac{|dz|^2}{(\text{Im } z)^2}$ $K = -1$

proposition Les Conformités de H (les éléments de $PSL(2, \mathbb{R})$) sont des isométries pour cette métrique (appelée hyperbolique).

Conséquence Si X est une surface de Riemann dont le revêtement universel est bi-conforme à H alors $X \cong H/\Gamma$

$$\Gamma \subset \text{Aut}(H) = PSL(2, \mathbb{R})$$

$\hookrightarrow$ Isométries $(H, \text{métrique hyperbolique})$.

donc X acquiert une métrique à courbure constante égale à -1

Par le théorème de Gauss-Bonnet.

$$\int_X iK \, dz \wedge d\bar{z} = 4\pi(2-2g).$$

$$= -1 \int_X i \, dz \wedge d\bar{z} \quad (i \, dz \wedge d\bar{z} = 2dx \wedge dy)$$

$$= (-1) \times 2 \, \text{Vol}_{\text{hyperbolique}}(X)$$

$$< 0$$

$$\text{donc } g \geq 2.$$

26/11

Classification des surfaces de Riemann de genre 1

proposition (1) Soit $f: \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda'$ une application bi-conforme entre deux tores complexes compacts de dim 1.

Alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ $f: [z]_\Lambda \rightarrow [\alpha z + \beta]_{\Lambda'}$

(2) Les tores $\mathbb{C}/\Lambda$ et $\mathbb{C}/\Lambda'$ sont bi-conformes si et seulement si

il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $\Lambda = a\Lambda'$ (Λ et Λ' sont similaires)

(3) (ω_1, ω_2) et (Ω_1, Ω_2) sont deux $\mathbb{Z}$ -bases d'un réseau Λ

si et seulement si $\exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$ tq $\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix}$

(4) Soit (w_1, w_2) une base de Λ telle que $\tau := \frac{w_2}{w_1} \in \mathbb{H}$
 Soit (w'_1, w'_2) une base de Λ' telle que $\tau' := \frac{w'_2}{w'_1} \in \mathbb{H}$

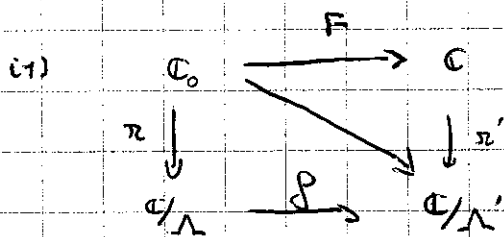
Λ et Λ' sont similaires si il existe $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ $\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$

Les classes d'isomorphismes de tores complexes de dim 1 sont paramétrées par $\mathbb{H} / \text{SL}(2, \mathbb{Z})$

voir cours
de dominique
sur les formes
modulaires

(5) Il existe une fonction holomorphe $g: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$, $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ invariante surjective, dont les fibres sont exactement les orbites de l'action de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$.
 L'ensemble des classes d'isomorphisme de tores complexes s'identifie donc à $\mathbb{C}$

démonstration (5) admis



Soit se réfère en une application F holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$
 car $\mathbb{C}_0$ (source) est simplement connexe et π' est un revêtement

On fixe $w \in \Lambda$ $z \mapsto F(z+w) - F(z)$ est
 holomorphe à valeur dans Λ' donc

donc est constante (ne peut pas être constante)

$\forall w \in \Lambda, \exists w' \in \Lambda' \forall z \in \mathbb{C} F(z+w) - F(z) = w'$

$\frac{dF}{dz}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ invariante
 par Λ donc bornée, donc constante
 donc F est affine

Chap IXCourbes algébriques planesI) Définitions

$\mathbb{P}^2$ l'espace projectif des droites vectorielles de $\mathbb{C}^3$
muni d'un repère projectif, avec des coordonnées
homogènes $[X, Y, Z]$

$\mathbb{C}[X, Y, Z]$ l'espace vectoriel des polynômes homogènes
de degré d $(P(rX, rY, rZ) = r^d P(X, Y, Z) \quad r \in \mathbb{C}^*)$

$$\mathbb{C}_d = \mathbb{C}[X, Y, Z]_d / \mathbb{C}^* = P(\mathbb{C}[X, Y, Z])$$

Définition Une courbe algébrique plane est la donnée d'un
élément F de $\mathbb{C}_d$

Soit $F \in \mathbb{C}_d$ définit $V(F) = \{[X, Y, Z] \in \mathbb{P}^2 \mid F(X, Y, Z) = 0\}$

Exemples • $V(X^2 Y) = V(X Y^2)$ mais $[X^2 Y] \neq [X Y^2]$ dans $\mathbb{C}_d$

• Si $(F, G) \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ homogènes

Si $G^n \in (F)$ alors il existe $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z] \mid G^n = PF$
donc G s'annule sur $V(F)$

Définition • Si Z est un sous ensemble de $\mathbb{P}^2$, on note

$$I(Z) = \{P \in \mathbb{C}[X, Y, Z] \text{ homogènes nuls sur } Z\}$$

• Si I est un idéal de $\mathbb{C}[X, Y, Z]$, on appelle radical de I

$$\sqrt{I} = \{P \in \mathbb{C}[X, Y, Z] \mid \exists n \in \mathbb{N}^* \quad P^n \in I\}$$

$$\text{on a } \sqrt{I(F)} \subset I(V(F))$$

Théorème (Nullstellensatz)

$$\text{Soit } F \in \mathbb{C}_d \quad \sqrt{I(F)} = I(V(F))$$

Soit $F \in \mathbb{C}[d]$ $V(F)_{z \neq 0} = \{ [x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \mid F(x, y, z) = 0, z \neq 0 \}$

$$= \{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = 0 \}$$

$$\text{où } f(x, y) = F(x, y, 1)$$

$$f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(x, y) \mapsto F(x, y, 1) = f(x, y)$$

Si $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$

$$\text{on a } \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)(x_0, y_0) \neq (0, 0)$$

alors f est une submersion au voisinage de $f^{-1}(0)$

$V(F)_{z \neq 0}$ est une surface de Riemann, sous variété de $\mathbb{C}^2$

Si les conditions analogues sont satisfaites sur les trois cartes alors $V(F)$ est une surface de Riemann

prop: Si $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ et $\frac{\partial F}{\partial z}$ n'ont pas de racines communes en dehors de $(0, 0, 0)$ alors $V(F)$ est une surface de Riemann

Dém: $x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = d \cdot F$

Exemple: Les courbes de Fermat $x^d + y^d + z^d = 0$

Fibre $O_{\mathbb{P}^2}(1)$:

On définit un f.b.c en choisissant $O_{\mathbb{P}^2}(1)$ sur $\mathbb{P}^2$ par les trois ouverts $U_x = \{ [x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \mid x \neq 0 \}$, U_y et U_z

$$U_x \times \mathbb{C} \supset (U_x \cap U_y) \times \mathbb{C} \longrightarrow (U_x \cap U_y) \times \mathbb{C} \subset U_y \times \mathbb{C}$$

$$([x, y, z], p) \xrightarrow{\psi_{yx}} ([x, y, z], \frac{x}{y} p)$$

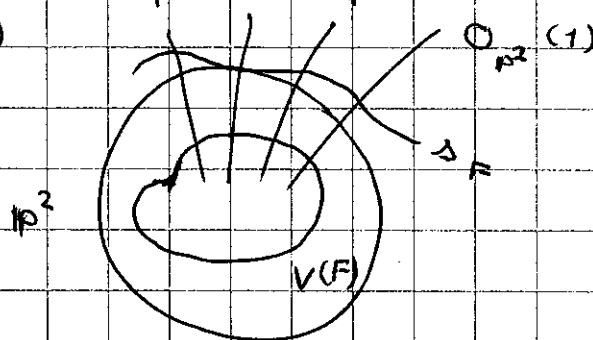
Sur $U_x \cap U_y \cap U_z$ $\psi_z \circ \psi_{yx} = \psi_{zx}$

• Si $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$,

$$\text{sur } U_X \quad \frac{F}{X} = \frac{F}{X}, \quad \text{sur } U_Y \quad \frac{F}{Y} = \frac{F}{Y}, \quad \text{sur } U_Z \quad \frac{F}{Z} = \frac{F}{Z}.$$

Sur $U_X \cap U_Y$, $\frac{F}{Y} = \frac{F}{X} \cdot \frac{X}{Y}$

On obtient une section holomorphe de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ dont le lieu des zéros est $V(F)$



• Si $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$,

$$\text{sur } U_X \quad \frac{F}{X^d} = \frac{F}{X^d}, \quad \text{sur } U_Y \quad \frac{F}{Y^d} = \frac{F}{Y^d}, \quad \text{sur } U_Z \quad \frac{F}{Z^d} = \frac{F}{Z^d}.$$

On définit une section de $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)) =: \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(cd)$ dont le lieu des zéros est $V(F)$

• Réciproquement, si s est une section polynomiale de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(cd)$ donnée sur U_X par $\frac{p_X(X, Y, Z)}{X^d}$

$$\text{sur } U_Y \quad \text{par } \frac{p_Y(X, Y, Z)}{Y^d}$$

$$\text{sur } U_Z \quad \text{par } \frac{p_Z(X, Y, Z)}{Z^d}.$$

$$\text{sur } U_X \cap U_Y \quad \frac{p_X(X, Y, Z)}{X^d} = \frac{Y^d}{X^d} \frac{p_Y(X, Y, Z)}{Y^d}$$

$$X^d \frac{p_X(X, Y, Z)}{X^d} = Y^d \frac{p_Y(X, Y, Z)}{Y^d} \quad \text{fractions rationnelles}$$

homogènes de degré d en (X, Y, Z) sans pôles sur $U_X \cap U_Y$

$$\text{sur } U_x \cap U_y \cap U_z \quad x^d p\left(\frac{x}{x}, \frac{z}{x}\right) = y^d \left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right) = z^d p\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \\ = F(x, y, z)$$

$F(x, y, z)$ fraction rationnelle homogène de degré d en (x, y, z)
sans pôles sur $U_x \cup U_y \cup U_z = \mathbb{P}^2$
c'est donc un polynôme

donc l'ensemble des sections polynomiales de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d) = \mathbb{C}[x, y, z]^d$

II) Intersections de courbes algébriques

Théorème de Bezout: (faible)

Deux courbes algébriques planes $V(F)$ et $V(G)$ ont au moins un point commun et si elles n'ont pas de composantes communes elles ont au plus $(\deg F)(\deg G)$ points communs

(Est une conséquence de la Méthode d'élimination, du résultant)

Théorème de Bezout précis:

Si deux courbes algébriques planes $V(F)$ et $V(G)$ n'ont pas de composantes communes, alors elles ont exactement $(\deg F)(\deg G)$ points d'intersection comptés avec multiplicités

Conséquence: On suppose que $V(F)$ est une surface de Riemann notée X . On note L la restriction à X du $\mathbb{P}^1$ -fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$ en choisis complexes $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$

$\deg L = n \cdot d$ de zéros comptés avec mult d'une section

Représentation de L de $s \in \mathcal{G}|_X$ où $G \in \mathbb{C}[x, y, z]^d$

$$= \#(V(F) \cap V(G))$$

$$= (\deg F) \cdot d$$

28/11

Si Z est un sous ensemble de $\mathbb{P}^2$, on définit l'idéal homogène défini par Z comme $I(Z)$ l'idéal homogène de $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ engendré par les polynômes homogènes nuls sur Z .

TR: (Nagata-Hartshorne projectif) Soit I un idéal homogène de $\mathbb{C}[X, Y, Z]$. Tout élément f de I est somme d'éléments homogènes de I .

$$(1) \quad V(I) = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad (X, Y, Z) \subset I$$

$$(2) \quad \text{Si } V(I) \neq \emptyset \quad \text{alors} \quad I(V(I)) = \sqrt{I}$$

Remarque 1. $V((1)) = \emptyset = V(X, Y, Z) \subset \mathbb{P}^2$

Si I est un idéal premier, (par exemple $I = (f)$ avec f homogène et irréductible) alors $\sqrt{I} = I$.

Tout polynôme homogène $F(X, Y, Z)$ de degré d donne lieu à une section polynomiale de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$.

Réciproquement, si s est une section holomorphe de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$ donnée sur U_x par la fonction holomorphe $p(y, z) = \frac{y^d}{x^d} + \frac{z^d}{x^d}$, $y = \frac{Y}{X}, z = \frac{Z}{X}$,

$$\text{on a sur } U_x \cap U_y \quad p_y\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right) = \frac{x^d}{y^d} p_x\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

$x^d p_x\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ est une fonction holomorphe des variables (x, y, z) sur $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

$$y^d p_y\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right) \sim \text{sur } \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$$

elles coïncident sur $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} = (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}) \cap (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C})$.

On obtient une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} - \{(0,0)\} \times \mathbb{C}$.

Par le théorème d'Hartogs, comme $\{(0,0)\} \times \mathbb{C}$ est de codimension 2 dans $\mathbb{C}^3$, cette fonction se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.
H est homogène de degré d sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

donc H est un polynôme de degré d et s est associé à H.

$H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d))$ l'espace des sections holomorphes de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$ sur $\mathbb{P}^2$ est isomorphe à $\mathbb{C}[X, Y, Z]_d$.

Multiplicité d'intersection d'une courbe lisse $V(F)$ (surface de Riemann) et d'une courbe algébrique plane $V(G)$
 Soit p_0 un point de $V(F) \cap V(G) \cap U_2$

On choisit une coordonnée Riemann t de $V(F)$ au voisinage U de p_0 , centrée en p_0 .

On note $\varphi^{-1}(t) = p(t)$ et $(x(t), y(t))$ les coordonnées affines
 $t \mapsto G(x(t), y(t), 1)$

Alors $\text{mult}_{p_0}(V(F) \cap V(G)) = \text{valuation en } t \text{ de cette fonction.}$
 ne dépend pas du choix de la coordonnée Riemann t .

Exemple: U_2 $p = y - z^2$ $V(F) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C} \rightarrow V(F)$
 $p = [0, 0, 1]$ $g = x^p + y^q$ $(x, y) \mapsto t = x$ $t \mapsto p(t) = (t, t^2)$

$g(p(t)) = t^p + (t^2)^q$ a pour valuation en p variable t ,
 l'entier $\min(p, 2q)$

• Calcul de $\deg(G_{p_i}(d)|_{V(F)})$

On choisit un polynôme G homogène de degré d tel que
 $V(G)$ et $V(F)$ n'ont pas de composante commune
 $V(F)$ et $V(G)$ s'intersectent en un nombre fini
 $(= \deg(F) \deg(G))$ de points.

Soit $\delta_G \in H^0(\mathbb{P}^2, G_{p_i}(d))$ et σ sa restriction
 à $V(F)$

on cherche $\deg(\text{div}(\sigma)) = \deg(G_{p_i}(d)|_{V(F)})$

δ_G est donnée par $\delta_2 = \frac{G(x, y, z)}{z^d} = G\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)$
 sur U_2 .

$\text{div} \delta_G = V(G)$

Soit $p_0 \in V(F) \cap V(G) \cap U_2$.

Soit $\varphi: U \rightarrow \mathbb{C}$ une carte de $V(F)$ au voisinage de p_0 centrée en p_0 .

L'expression de σ dans la carte φ

$$\sigma \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{\varphi_2} \mathbb{C}$$

$$t \mapsto p(t) \mapsto \varphi_2(p(t)) = G(x(t), y(t), 1).$$

$$\text{donc } \text{ord}_{p_0} \sigma = \text{Mult}_{p_0} (V(F) \cap V(G))$$

$$\sum_{p \in V(F) \cap V(G)} \text{ord}_p \sigma = \sum_{p \in V(F) \cap V(G)} \text{mult}_p (V(F) \cap V(G))$$

$$\text{deg}(\text{div } \sigma)$$

|| Bezout.

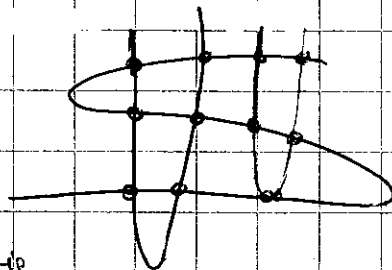
$$\text{deg}((G|_{V(F)})) = \text{deg } F \cdot \text{deg } G$$

$V(G)$ coupe sur $V(F)$ en diviseur D_G de degré $(\text{deg } F)(\text{deg } G)$.

Si G et G' sont deux éléments de $\mathbb{C}[X, Y, Z]$

tel que $V(G)$ et $V(G')$

$$D_G - D_{G'} = \text{div} \left(\frac{G}{G'}|_{V(F)} \right)$$



$\frac{G}{G'}$ est une fonction rationnelle bien définie
($\text{deg } G = \text{deg } G'$) sur $\mathbb{P}^2$

Calcul du degré canonique de $V(F)$

Soit $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ tel que $V(F) \subset \mathbb{P}^2$ soit lisse

On suppose que $[0, 1, 0] \notin V(F)$ et que

$$V(F) \cap V\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right) \cap V(Z) = \emptyset$$

On considère la 1^{re} forme méromorphe

$$d\left(\frac{X}{Z} \middle| V(F)\right) = dz$$

fonction méromorphe
non nulle et bien définie sur $V(F)$

1) Avec points de $U_Z \cap V(F)$

Soit $p_0 \in U_Z \cap V(F)$: il existe une coordonnée projective de $V(F)$
centrée en p_0

$t \mapsto (x(t), y(t))$ un paramétrage local de $V(F)$
au voisinage de p_0

L'expression de dz dans la carte φ est

$$p^* dz = x'(t) dt$$

$$F(x(t), y(t), 1) = 0$$

$$x'(t) \frac{\partial F}{\partial x} + y'(t) \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

• comme $x(t), y(t)$ est un paramétrage local de $V(F)$
 $x'(t)$ et $y'(t)$ ne sont pas simultanément nuls

comme $V(F)$ est lisse, $\frac{\partial F}{\partial x}(p_0)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(p_0)$ ne sont pas

simultanément nul $\text{ord}_{p_0} dz = \text{mult}_{p_0} \left(V(F) \cap V\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \right)$

2) Avec points p_0 de $(z \neq 0) \cap V(F)$

$$L = (z=0)$$

$$p_0 = [x_0, y_0, 0] \text{ avec } x_0 \neq 0$$

$$\text{car } [0, 1, 0] \notin V(F)$$

On se place dans l'ouvert U_x Les points de $V(F)$
sont paramétrisés par

$$t \mapsto [1, y(t), z(t)]$$

L'expression de dz dans cette carte

$$p^* dz = - \frac{z'(t)}{z^2(t)} dt \quad x(p(t)) = \frac{1}{z(t)}$$

$$F(1, y(t), z(t)) = 0$$

$$y'(x) \frac{\partial F}{\partial y}(p_0) + z'(x) \frac{\partial F}{\partial z}(p_0) = 0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(p_0) \neq 0 \quad \text{car } p_0 \in V(F) \cap V(Z)$$

$$\text{donc } z'(p_0) \neq 0$$

$$\begin{aligned} \omega_p dx &= -2 \operatorname{val}_p z(x) & z(x) &= z(p(x)) \\ &= -2 \operatorname{mult}_{p_0}(V(F), L) \end{aligned}$$

3) degré canonique de $V(F)$

$$= \deg \operatorname{div} dx.$$

$$= \sum_{P \in U_2} \operatorname{val}_P dx + \sum_{P \in L} \operatorname{val}_P dx$$

$$= \sum_{P \in U_2} \operatorname{mult}_P(V(F) \cap V(\frac{\partial F}{\partial y})) - 2 \sum_{P \in L} \operatorname{mult}_P(V(F), L)$$

$$= (\deg F) (\deg \frac{\partial F}{\partial y}) - 2 \deg F \cdot 1$$

$$= d(d-1) - 2d = d(d-3) = (d-1)(d-2) - 2 \quad \text{où } d = \deg F$$

$$\text{Par ailleurs } d_{V(F)} = 2g(V(F)) - 2$$

$$\text{d'où } g(V(F)) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

$$\bullet d=1$$

$$g=0$$

droite projective dans $\mathbb{P}^2$

$$\bullet d=2$$

$$g=0$$

conique plane de $\mathbb{P}^2$

$$\bullet d=3$$

$$g=1$$

surface complexe de dimension 1

$$\bullet d=4$$

$$g=3$$

Les surfaces de Riemann de genre 2 ne peuvent pas être réalisées comme courbe algébrique plane

- Corps de fonctions rationnelles sur une courbe algébrique affine C_f
Soit $f \in \mathbb{C}[x, y]$ irréductible C_f la courbe affine.

$$C_f = \{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = 0 \}$$

Par définition Σ_f le corps des fonctions rationnelles sur C_f
est le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{C}[x, y]_{(f)} = R_f$.

- Corps des fonctions rationnelles sur une courbe algébrique projective $V(F)$

Soit $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$, $V(F)$ la variété.

Par définition, le corps des fonctions rationnelles sur $V(F)$ est

$$\Sigma_F = \left\{ \frac{A}{B} \mid A, B \in \mathbb{C}[x, y, z] \text{ homogène de même degré} \right\}$$

$$\frac{A}{B} \sim \frac{A'}{B'} \iff F \text{ divise } AB' - A'B$$

Lemme: Si $V(F) \not\subset V(z)$ alors $\Sigma_F \cong \Sigma_g$
où $g(x, y) = F(x, y, 1)$ $\frac{A}{B} \mapsto \frac{A(x, y, 1)}{B(x, y, 1)}$

Structure Σ_f

- Si la fonction x est constante sur $C_f \subset \mathbb{C}^2$

$$\exists c \in \mathbb{C} \quad x - c \in \mathfrak{p}(C_f) = \sqrt{(f)} = (f)$$

Donc f est affine et $\Sigma_f = \mathbb{C}(y)$

- Sinon, x est transcendante sur $\mathbb{C}$

$$f(x, y) = 0 \text{ sur } C_f$$

Donc $y|_{C_f}$ est algébrique sur $\mathbb{C}(x)$

$x|_{C_f}$ et $y|_{C_f}$ engendrent le corps Σ_f comme algèbre

$$\Sigma_f = \mathbb{C}(x|_{C_f}, y|_{C_f}) = \mathbb{C}(x|_g)[y|_{C_f}] / \mu$$

où μ est le polynôme minimal de $y|_{C_f}$ sur $\mathbb{C}(x|_{C_f})$

$$\Sigma_F \cong \mathbb{C}(x)[Y] / p(Y).$$

extension algébrique de $\mathbb{C}(x)$ engendrée par deux éléments

05/12

Structure de Σ_F

Soit $V(F)$ une courbe algébrique plane ^{irréductible} (non nécessairement lisse)
 $V(F) \cong \mathbb{A}^1$ et Σ_F le corps des fonctions rationnelles
 sur $V(F) / \mathbb{C} \quad (\Sigma_F \cong \mathbb{C}_F)$

* Si la fonction $x = \frac{X}{Z}$ (resp. y) est constante alors f est affine

$\Sigma_F = \mathbb{C}(y)$ y est transcendante sur $\mathbb{C}$, car non constante.

* Sinon, x est transcendante sur $\mathbb{C}$, y est transcendante sur $\mathbb{C}$.
 mais y vérifie $f(x, y) = 0$ où $f \in \mathbb{C}[X, Y]$
 y est algébrique sur $\mathbb{C}(x)$

De plus, $\{x, y\}$ engendrent Σ_F comme algèbre
 donc $\Sigma_F = \mathbb{C}(x, y) = \mathbb{C}(x)[Y] / p_y(Y)$

où $p_y(T) \in \mathbb{C}(x)[T]$ est le polynôme minimal de y
 dans $\mathbb{C}(x)[T]$

Σ_F est une extension algébrique de $\mathbb{C}(x)$

$p_y(T)$ est $f(x, y)$ normalisé $\in \mathbb{C}[X, Y] \subset \mathbb{C}(x)[Y]$

car $f(x, y)$ irréductible dans $\mathbb{C}[X, Y]$ par le lemme de Gauss dans $\mathbb{C}(x)[Y]$

Lemme: Deux éléments ^{(a, b) non constants} de Σ_F sont toujours algébriquement
 dépendants (il existe un polynôme $P(x, y) \in \mathbb{C}[X, Y]$

tel que $P(s, R) = 0$

Démonstration: Soit α et β non constants sur $V(F)$

comme Σ_F est algébrique sur $\mathbb{C}(\alpha)$ il existe $A \in \mathbb{C}(\alpha)[X]^*$

tel que $A(\beta) = 0$ et $B \in \mathbb{C}(\alpha)[X]^*$ tel que $B(\beta) \neq 0$.

en multipliant par une fonction rationnelle convenable de α

on peut supposer que $A \in \mathbb{C}[\alpha][X]$ tel que $C(A) = 1$

$B \in \mathbb{C}[\alpha][X]$ tel que $C(B) = 1$

et que α n'est facteur ni de A , ni de B

$A(X, Y)$ et $B(X, Z) \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ n'ont pas de facteurs

communs

α est non constant donc $\deg_X A(X, Y) \geq 1$ $\deg_X B(X, Z) \geq 1$

$R(Y, Z)$ tel que $(A, B) \in \mathbb{C}[Y, Z]$ non nul

Mais $A(X, \alpha) \mid B(X, \beta)$ et $(X - \alpha)$ comme facteur commun dans $\mathbb{C}(\alpha)[X]$.

$R(\alpha, \beta) \neq 0 \in \mathbb{C}(\alpha)$ si $R \in \mathbb{C}[Y, Z]$.

On dit alors que Σ_F est de degré de transcendance 1 (admet un élément transcendant sur $\mathbb{C}$, mais de famille à deux éléments algébriquement indépendants)
(caractérisation des corps de fonctions rationnelles sur les courbes algébriques irréductibles)

proposition: Soit $Z (\supset \mathbb{C})$ un corps

Z est le corps des fonctions rationnelles sur une courbe algébrique irréductible

et (i) Z est engendré sur $\mathbb{C}$ par un nombre fini d'éléments

(ii) Z est de degré de transcendance 1.

démonstration Si (i) et (ii) sont satisfaites, soit $t \in \Sigma$ un élément transcendant $x_1, \dots, x_n$ une famille génératrice (en tant qu'algèbre) de Σ .

Comme deg trans $\Sigma = 1, x_i$ sont algébriques sur $\mathbb{C}(t)$

Par le théorème de l'élément primitif, il existe $y \in \Sigma$ tel que $\Sigma = \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{C}(t)(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{C}(t)(y)$

Il existe $p \in \mathbb{C}[t, y]$ irréductible tel que $p(t, y) = 0$.
donc Σ est le corps des fractions rationnelles sur $V(p) =$

Théorème Soit X une surface de Riemann compacte et $\mathcal{M}(X)$ soit l'espace des fonctions méromorphes

(i) Si f et g sont deux éléments non constants de $\mathcal{M}(X)$ ils sont alg. dépendants (deg trans $\mathcal{M}(X) = 1$)

(ii) On peut choisir f et $g \in \mathcal{M}(X)$ tel que toute $R \in \mathcal{M}(X)$

s'écrit $R = R_0(p) + R_1(p)g + \dots + R_d(p)g^d$ où $R_i \in \mathbb{C}(z)$
($\mathcal{M}(X)$ est engendré par f et g)

(iii) Il existe une courbe algébrique plane irréductible $V(F)$ tel que
 $\mathcal{M}(X) = \sum_{\substack{\text{méromorphe} \\ \text{rationnelle}}} F$

On dit que X est birationnelle à $V(F)$

Démonstration (i) f correspond à un revêtement ramifié $F: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ qui fait de $\mathcal{M}(X)$ une extension algébrique de $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}(z)$

En particulier g vérifie une équation

$$0 = g^d + F^{*}a_1(z)g^{d-1} + F^{*}a_2(z)g^{d-2} + \dots + F^{*}a_d(z)$$

$$X \xrightarrow{F} \mathbb{P}^1 \xrightarrow{g} \mathbb{A}^1 \cup \infty$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_f$

$$\text{donc } 0 = g^d + a_1(p)g^{d-1} + \dots + a_d(p)$$

donc f et g sont algébriquement dépendants

(ii) On choisit $f \in \mathcal{M}(K)$ non constant et g qui prend des valeurs ≥ 2 distinctes sur une fibre de $F: X \rightarrow \mathbb{P}^1$

Soit $R \in \mathcal{M}(X)$, pour tout $z \in \mathbb{P}^1$ $\{P_i(z)\} = F^{-1}(z)$

$$d = \deg(F)$$

$$\frac{R(P_1)}{u - g(P_1)} + \frac{R(P_2)}{u - g(P_2)} + \dots + \frac{R(P_d)}{u - g(P_d)} = \frac{G_2(u)}{F_2(u)}$$

$$\text{où } \frac{G_2(u)}{F_2(u)} \in \mathbb{C}(z)[u] \text{ de degré } \leq d-1$$

les coefficients de $G_2(u)$ et $F_2(u)$ sont méromorphes en z .

car méromorphes et symétriques en les P_i .

$F_2(u)$ est irréductible dans $\mathbb{C}(z)[u]$.

car g prend des valeurs deux à deux distinctes sur une fibre de F et F_2 est le polynôme minimal de g dans $\mathbb{C}(z)[u]$.

$$R(P_i) = \frac{G_2(g(P_i))}{\left(\frac{\partial}{\partial u} F_2\right)(g(P_i))}$$

Comme F_2 est irréductible, donc premier avec $\frac{\partial F_2}{\partial u}$.

Il existe $H_2(u)$ et $L_2(u) \in \mathbb{C}(z)[u]$.

$$\forall u \quad H_2(u) F_2(u) + L_2(u) \left(\frac{\partial}{\partial u} F_2\right)(u) = 1.$$

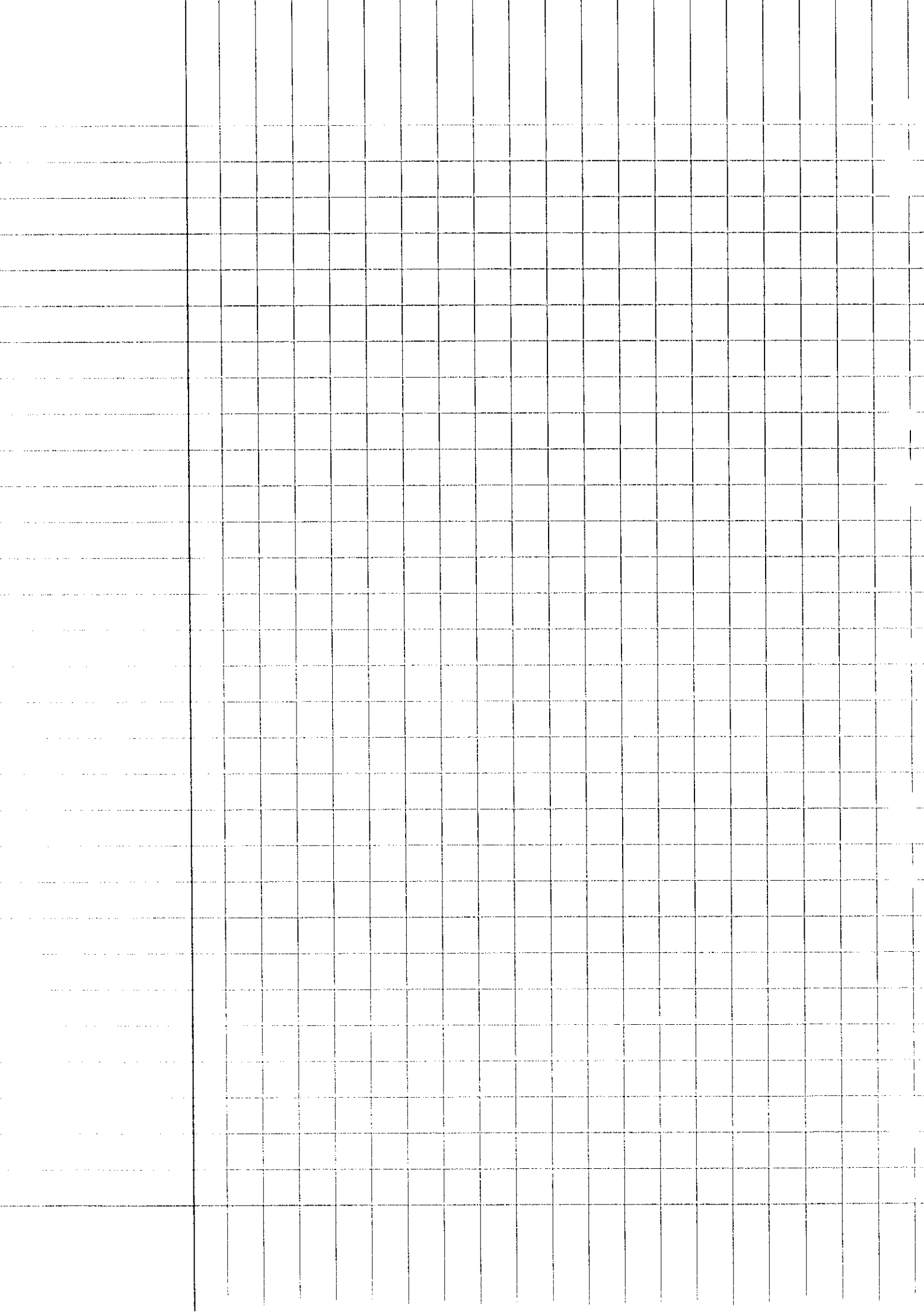
$$\text{On pose } M_2(u) = G_2(u) L_2(u) \in \mathbb{C}(z)[u]$$

$$\forall p_i \in X \quad G_{f(p_i)}(g(p_i)) \cdot L_{f(p_i)}(g(p_i)) = R(p_i)$$

$$M_2(u) = \alpha_0(z) + \alpha_1(z)u + \dots + \alpha_r(z)u^r \quad \text{avec } \alpha_i \in \mathbb{C}(z)$$

$$\text{On obtient } R = \alpha_0(p) + \alpha_1(p)g + \dots + \alpha_r(p)g^r \\ = \beta_0(p) + \beta_1(p)g + \dots + \beta_r(p)g^r$$

car β polynôme minimal de g dans $\mathbb{C}(p)$ est de degré r $\leftarrow$ d'après #



Surfaces de Riemann

1. Fonctions sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{P}^1$

- 1) Quelles sont les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ qui se prolongent en fonctions holomorphes sur $\mathbb{P}^1$?
- 2) Quelles sont les fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ qui se prolongent en fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}^1$?
- 3) Quelles sont les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ qui se prolongent en fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}^1$?

2. Ramification

Déterminer les points de ramification de l'application $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1, [X : Y] \mapsto [X^2 : Y^2]$.

3. Corps de fonctions méromorphes

Soit X une surface de Riemann connexe compacte de genre g et a un point de X .

- 1) Montrer qu'il existe une fonction méromorphe h sur X holomorphe sur $X - \{a\}$ et qui admet un pôle d'ordre exactement $2g + 1$ en a .
- 2) Montrer que le polynôme $T^2 - h$ d'indéterminée T à coefficients dans le corps $\mathcal{M}(X)$ des fonctions méromorphes sur X est irréductible, c'est à dire que h n'est pas un carré dans $\mathcal{M}(X)$.
- 3) Déterminer un majorant du genre de la surface de Riemann déterminée par le polynôme $T^2 - h$.
- 4) Le corps $\mathcal{M}(X)$ est-il algébriquement clos ?

4. Fibrés en droites

Dans tout l'exercice, on travaille sur une surface de Riemann X connexe compacte.

- 1) Montrer qu'une section holomorphe non nulle d'un fibré holomorphe en droites complexes de degré nul ne s'annule jamais.
- 2) Montrer qu'un fibré holomorphe en droites complexe avec une section partout non nulle est isomorphe au fibré trivial $X \times \mathbb{C} \rightarrow X$.
- 3) Montrer que si un fibré L et son dual L^* admettent une section non nulle alors L est isomorphe au fibré trivial.
- 4) Deux fibrés holomorphes en droites complexes de même degré ont-ils des espaces de sections holomorphes de même dimension ?

5) Soit D un diviseur sur X et L_D la classe d'isomorphisme de fibré en droites associé. Expliciter l'application qui à une fonction méromorphe f de diviseur tel que $\text{div}(f) + D \geq 0$ associe une section (U_i, s_i) de L_D

6) On suppose maintenant que $D \geq 0$ (on dit que D est effectif). Déterminer la section 1_D de L_D associée à la fonction constante 1 ainsi que son diviseur dans L_D

Exo 1:

1) Les constantes

2) IP faut un pôle fini en ∞

Les fractions rationnelles

3) IP faut qu'un pôle fini en ∞ , en développement en série entière et finie des polynômesExo 2:

$$f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$$

$$[X, Y] \mapsto [X^2, Y^2]$$

Si $X \neq 0$ et $Y \neq 0$

$$[X, Y] \xrightarrow{f} [X^2, Y^2]$$

$$[-X, Y]$$

$$[X, -Y] \xrightarrow{f} [X^2, Y^2]$$

[1, 0] et [0, 1] sont les points de ramification

on retrouve le nombre de ramification

par le théorème de Riemann-Hurwitz

$$2 \cdot \deg f = 2$$

Exo 3:1) On regarde l'espace $H = H^0(X, \mathcal{O}_X((2g+1)a)) = H^0(X, \mathcal{O}_X((2g)a))$

$$R^0(X, \mathcal{O}_X((2g+1)a)) = R^0(X, \Omega_X^1(-(2g+1)a)) = 1 + (2g+1) - g$$

$$R^0(X, \mathcal{O}_X((2g)a)) = R^0(X, \Omega_X^1(-(2g)a)) = 1 + 2g - g$$

$$\text{d'où } \dim H = g + 2 + R^0(X, \Omega_X^1(-(2g+1)a)) - g - 1 + R^0(X, \Omega_X^1(-(2g)a))$$

$$= 1 + R^0(X, \Omega_X^1(-(2g+1)a)) - R^0(X, \Omega_X^1(-(2g)a))$$

$$\Omega_X^1(-(2g+1)a) = \Omega_X^1 \otimes \mathcal{L}_{-(2g+1)a}$$

$$\deg(\Omega_X^1(-(2g+1)a)) = \deg \Omega_X^1 - (2g+1)$$

$$= (2g-2) - (2g+1)$$

$$= -3$$

$$\text{donc } R^0(X, \Omega_X^1(-(2g+1)a)) = 0$$

$$\text{de même } R^0(X, \Omega_X^1(-(2g)a)) = 0$$

$$\text{d'où } \dim H = 0$$

2) on a $R \sim \frac{1}{(2-2g)^{2g+1}}$

si $R = g^2$ on a $g \sim \frac{1}{(2-2g)^m}$

donc $2g+1 = 2m$ contradiction

ie R n'est pas un cône

donc $T^2 - R$ est irréductible

3) Soit Y le revêtement de X engendré par le polynôme $T^2 - R$ par la formule de Riemann Hurwitz

$$2 - 2g = 2(2 - 2g(Y)) - \# \text{ point ramifié}$$

on a des points ramifiés car $T^2 - R(x_0)$ a une racine double ie $R(x_0) = 0$ ou $R(x_0) = \infty$

$$R(x_0) = \infty \text{ si } x_0 = a.$$

$$\text{d'où } \# \text{ point ramifié} = 1 + \# Z(R)$$

$$\text{donc } 2 - 2g = 4 - 4g(Y) - 1 - \# Z(R)$$

$$\text{ie } 4g(Y) = 2g+1 - \# Z(R)$$

$$\text{on obtient ainsi une majoration } g(Y) \leq \frac{2g+1}{4}$$

4) Le corps $\mathbb{A}(X)$ n'est pas algébriquement clos car $T^2 - R$ est irréductible

Exercice 4

COURBES ALGEBRIQUES, SURFACES DE RIEMANN

Exercices

EXERCICE 1

- 1) Montrer qu'un revêtement double d'une surface de Riemann compacte est ramifié en un nombre pair de points.
- 2) Déterminer le genre d'une surface de Riemann revêtement double de $\mathbb{P}^1$ ramifié en $2n$ points.
- 3) Déterminer le genre de la surface de Riemann de $\sqrt[n]{z}$.
- 4) Expliciter l'extension de corps associé au morphisme $\mathbb{P}^1$ dans lui-même qui envoie z sur z^n .
- 5) Soit $F = ZY^2 - X^3 - Z^3$. Montrer que X_F est lisse. Déterminer les points de ramification de l'application $X_F \rightarrow \mathbb{P}^1_{[X:Z]}$ restriction de la projection $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1_{[X:Z]}, [X : Y : Z] \rightarrow [X : Z]$. En déduire le genre de X_F .

EXERCICE 2 (genre nul)

On considère un point a de l'espace projectif $P(V)$ des droites d'un espace vectoriel complexe V de dimension 2.

- 1) Décrire des cocycles pour un fibré holomorphe en droites complexes $L = L_a$ associé au diviseur a .
- 2) Calculer la dimension de l'espace de sections holomorphes de L^k .
- 3) Construire une application linéaire injective $f : S^k V^* \rightarrow H^0(X, L^k)$
- 4) Expliciter en termes de coordonnées homogènes l'application $\phi_{|L^2|}$ associée aux sections de L^2 .
- 5) On choisit une base de V qui fournit des coordonnées homogènes $[X : Y]$ sur $P(V)$. Quelle est la singularité à l'infini $([1 : 0])$ de la 1-forme holomorphe $dx = d(X/Y)$? Existe-il une 1-forme méromorphe sur $P(V)$ avec un unique pôle d'ordre 1 ?

EXERCICE 3

Dans tout l'exercice, on fixe sur $\mathbb{P}^2 := \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ des coordonnées homogènes $[X : Y : Z]$ et des coordonnées affines $x = X/Z, y = Y/Z$ dans l'ouvert $Z \neq 0$. F est un polynôme homogène de degré d en trois variables, X_F la courbe algébrique plane associée qu'on supposera toujours lisse et $f(x, y) = F(x, y, 1)$. On supposera aussi que le repère projectif est choisi de sorte que la fonction x n'est pas constante sur X_F et que le résultant de f par rapport à y n'est pas identiquement nul.

1) Décrire l'application $X_F \rightarrow \mathbb{P}_{[X:Z]}^1$ restriction de la projection $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{[X:Z]}^1, [X : Y : Z] \rightarrow [X : Z]$.

2) Montrer qu'il existe un point x_0 qui ne soit pas l'abscisse d'un point de $X_F \cap (Z = 0)$ et tel que $\text{res}_y(f) \in \mathbb{C}[x]$ soit non nul en x_0 . Montrer que le corps des fonctions méromorphes sur X_F est engendré par les restrictions à X_F de x et de y . En déduire que les fonctions méromorphes sur X sont les restrictions des fonctions rationnelles sur $\mathbb{P}^2$.

EXERCICE 4 (retour sur les revêtements)

1) Soit X une surface de Riemann compacte. On fixe n points sur X . Montrer qu'il existe une fonction méromorphe sur X qui prend des valeurs deux à deux distinctes en ces n points.

2) Montrer que si $p : X \rightarrow Y$ est un morphisme non constant de degré d entre surfaces de Riemann compactes alors p^* fait de $\mathcal{M}(X)$ une extension algébrique de $\mathcal{M}(Y)$ de degré exactement d .

EXERCICE 5 (genre 1)

1) Soit τ un nombre complexe de partie imaginaire non nulle. Déterminer une base de l'espace des 1-formes holomorphes sur le tore $T = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}\tau)$.

2) Le diviseur $0 + 1/2 - 2 \times \tau/2$ est-il principal ?

3) Existe-il une 1-forme méromorphe sur T avec un unique pôle d'ordre exactement 1 ? et avec un unique pôle d'ordre exactement 2 ?

EXERCICE 6 (genre supérieur à 2)

Peut-on plonger une surface de Riemann de genre 2 dans un espace projectif de dimension 2 ? Soit X une surface de Riemann de genre au moins 2. Déterminer une puissance tensorielle du fibré Ω_X^1 dont l'espace des sections permet de plonger X dans un espace projectif. Déterminer alors la dimension de cet espace projectif.

EXERCICE 7 (genre supérieur à 2)

On considère une courbe algébrique plane X_F lisse de degré supérieur à 3 donnée par l'équation $F(X, Y, Z)$. On considère une forme holomorphe ϖ sur X_F par exemple donnée sous la forme $\frac{p(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}} dx$

où p est un polynôme de degré inférieur à $d - 3$. On fixe un point a de X . Montrer que si (p_i) sont les d points d'intersection de X_F avec une droite de $\mathbb{P}^2$, la quantité

$$\sum \int_a^{p_i} \varpi \bmod P$$

où P est le réseau des périodes complexes, ne dépend pas de la droite choisie.

Exercices M2 : Surfaces de Riemann

On rappelle le théorème des fonctions implicites dans le cadre holomorphe. Soit $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit (x_0, y_0) un point de $\mathbb{C}^2$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$. Alors $f^{-1}(0)$ est une sous variété analytique complexe de $\mathbb{C}^2$ au voisinage de (x_0, y_0) et $t = y$ peut être choisie comme coordonnée holomorphe au voisinage de (x_0, y_0) . Le paramétrage $t \mapsto (x(t), t)$ vérifie alors $x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), t) = 0$.

Dans tous les exercices relatifs aux courbes algébriques planes, on supposera $\mathbb{P}^2$ muni d'un repère projectif et de coordonnées homogènes associées, notées $[X : Y : Z]$. On notera $U_Z : \{[X : Y : Z] \in \mathbb{P}^2, Z \neq 0\}$ et $x := X/Z, y := Y/Z$ les coordonnées holomorphes associées. Si $F(X, Y, Z)$ est un polynôme homogène, on notera alors $f(x, y) := F(X, Y, 1)$.

1. Courbes algébriques planes

- 1) La courbe algébrique plane $\mathcal{C}$ d'équation $F(X, Y, Z) = X^3 + Y^3 + Z^3 = 0$ est-elle lisse ?
- 2) Si oui, déterminer un recouvrement de $\mathcal{C}$ par des ouverts de carte.
- 3) Si oui, déterminer son genre.
- 4) Montrer que la 1-forme définie sur $U_Z \cap \mathcal{C}$ par $\frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial x}}$ et holomorphe et se prolonge en une 1-forme holomorphe sur $\mathcal{C}$.

2. Diviseurs principaux

- 1) Soit τ un nombre complexe de partie imaginaire non nulle. Déterminer une base de l'espace des 1-formes holomorphes sur le tore $T = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}\tau)$.
- 2) Le diviseur $0 + 1/2 - 2 \times \tau/2$ est-il principal ?

3. Retour sur les revêtements

- 1) Soit X une surface de Riemann compacte. On fixe n points sur X . Montrer qu'il existe une fonction méromorphe sur X qui prend des valeurs deux à deux distinctes en ces n points.
- 2) Montrer que si $p : X \rightarrow Y$ est un morphisme non constant de degré d entre surfaces de Riemann compactes alors p^* fait de $\mathcal{M}(X)$ une extension algébrique de $\mathcal{M}(Y)$ de degré exactement d .

4. Espace de sections holomorphes

Soit X une surface de Riemann et L un fibré en droites holomorphe sur X . On suppose que l'espace des sections holomorphes de L sur X est de dimension $N < +\infty$.

1) Construire un N -uplet P de points de X tel que toute section de L nulle en P est identiquement nulle.

2) On fixe un point x_0 et une coordonnée holomorphe z au voisinage U de carte de x_0 . On considère d fonctions holomorphes $(u_i)_{i=1}^d$ sur U . Montrer par récurrence sur d que le déterminant

$$W(u_1, \dots, u_d) := \det \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) & \cdots & u_d(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) & \cdots & u_d'(z) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_1^{(d-1)}(z) & u_2^{(d-1)}(z) & \cdots & u_d^{(d-1)}(z) \end{pmatrix}$$

est identiquement nul au voisinage de x_0 si et seulement si les fonctions holomorphes $(u_i)_{i=1}^d$ sont linéairement dépendantes.

3) On choisit un ensemble $(s_i)_{i=1}^d$ de sections holomorphes de L sur X . On fixe un point x_0 et une coordonnée holomorphe z au voisinage U de carte trivialisant L de x_0 . La section s_i est donnée par la fonction holomorphe u_i sur U . Montrer par récurrence sur d que le déterminant

$$\det \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) & \cdots & u_d(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) & \cdots & u_d'(z) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_1^{(d-1)}(z) & u_2^{(d-1)}(z) & \cdots & u_d^{(d-1)}(z) \end{pmatrix}$$

est identiquement nul au voisinage de x_0 si et seulement si les sections s_i sont linéairement dépendantes.

5. Fibrés et plongements

Peut-on plonger une surface de Riemann de genre 2 dans un espace projectif de dimension 2 ? Soit X une surface de Riemann de genre au moins 2. Déterminer une puissance tensorielle du fibré Ω_X^1 dont l'espace des sections permet de plonger X dans un espace projectif. Déterminer alors la dimension de cet espace projectif.

6. Points de Weierstrass

Dans tout l'exercice, X désignera une surface de Riemann connexe compacte de genre g supérieur à 2 et x_0 un point de X .

6.1. Sauts de Weierstrass. —

1) Pour tout entier k strictement positif, on note $c_k(x_0) := h^0(X, L_{(k)x_0}) - h^0(X, L_{(k-1)x_0})$. Montrer que $0 \leq c_k(x_0) \leq 1$.

2) Montrer que $\sum_{k=1}^{2g-1} c_k(x_0) = h^0(X, L_{(2g-1)x_0}) - 1 = g - 1$.

3) En déduire le nombre d'entiers k entre 1 et $2g - 1$ tels qu'il n'existe pas de fonctions méromorphes sur X , holomorphes sur $X - \{x_0\}$, avec un pôle d'ordre exactement k .

6.2. Points de Weierstrass et courbes hyper-elliptiques. —

On dit qu'un point x_0 de X est de Weierstrass s'il existe une fonction méromorphe sur X , holomorphe en dehors de x_0 et avec un pôle d'ordre inférieur à g en x_0 .

4) On suppose que X est hyper-elliptique. Montrer qu'aux points x_r de ramification de $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ de degré 2, il existe une fonction méromorphe, holomorphe sur $X - \{x_r\}$ avec un pôle d'ordre 2 en x_r .

5) En déduire que les points de ramification sont des points de Weierstrass.

6) En déduire le nombre minimal de points de Weierstrass d'une surface de Riemann hyper-elliptique de genre $g \geq 2$.

7) Déterminer les entiers k entre 1 et $2g - 1$ tels qu'il n'existe pas de fonctions méromorphes sur X , holomorphes sur $X - \{x_r\}$, avec un pôle d'ordre exactement k .

7. Géométrie hyperbolique

1) Déterminer un élément de $PSL(2, \mathbb{R})$ qui agit sans point fixe sur le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$.

2) Déterminer un élément de $PSL(2, \mathbb{R})$ qui agit avec un point fixe sur le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$.

3) Soit a et b deux nombres réels tels que $-1 < a < b < 1$. On rappelle que l'aire hyperbolique d'une région A de H est

$$\int_A \frac{dx dy}{y^2}.$$

Calculer l'aire hyperbolique de la région définie par $x^2 + y^2 \geq 1$, $a \leq x \leq b$.

8. Quartique de Klein

Soit $\mathcal{Q}$ la courbe algébrique définie par le polynôme homogène $F(X, Y, Z) = X^3Y + Y^3Z + Z^3X$.

1) La courbe $\mathcal{Q}$ est-elle lisse. Si oui, déterminer son genre.

2) Décrire un automorphisme de $\mathcal{Q}$ d'ordre 3.

3) Soit $w := \exp(2i\pi/7)$. Montrer que $(X, Y, Z) \mapsto (wX, w^4Y, w^2Z)$ est un automorphisme de $\mathcal{Q}$ et calculer son ordre.

4) Soit $a := w^5 - w^2$, $b := w^3 - w^4$, $c := w^6 - w$. Montrer que

$$(X, Y, Z) \mapsto \begin{cases} aX + bY + cZ \\ bX + cY + aZ \\ cX + aY + bZ \end{cases}$$

est un automorphisme et calculer son ordre.

5) En déduire un minorant de l'ordre du groupe des automorphismes de $\mathcal{Q}$.

TD: Surfaces de Riemann

I) 1)
$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 3x^2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 3y^2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 3z^2 = 0 \end{cases} \quad \text{ssi} \quad (x, y, z) = (0, 0, 0) \notin \mathbb{P}^2$$

donc C est lisse

2) Sur $U_z: g(x, y) = x^3 + y^3 + 1 = 0$

Sur $U_z \cap U_x: \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 3x^2 = 0$

$\varphi_1: C \cap U_z \cap U_x \rightarrow 0$

$[x: y: z] \mapsto \frac{y}{z} = y$

Localement isomorphe par
à l'origine des fonctions implicites.

on recouvre $C \cap U_z \cap U_x$ par V_1 où $\varphi_1: V_1 \rightarrow \mathbb{P}^1(V_1)$
isomorphe

(compact on a zones recouvrement fini), compatible car courbe plane lisse
dans surface de Riemann

3) $g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) = 1$

4) Sur $C \cap U_z \cap U_x: \frac{dy}{\frac{\partial g}{\partial y}}$ est bien définie, isomorphe

Sur $C \cap U_z \cap U_y: -\frac{dx}{\frac{\partial g}{\partial x}}$ est bien définie, isomorphe

on définit donc une 1-forme isomorphe sur $C \cap U_z$ car

$\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = 0$ sur $C \cap U_z$

Au voisinage d'un point $[a: b: 0] = M$

$a \neq 0$ et $b \neq 0$

$M \in U_x \quad u = \frac{y}{x} \quad v = \frac{z}{x} \quad \text{avec} \quad u^3 + v^3 + 1 = 0$

Sur $C \cap U_x \cap U_y \cap U_z$

$-\frac{dx}{3y^2} = -\frac{dx}{\frac{\partial g}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial g}{\partial y}} = \frac{dy}{3x^2}$

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{z} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y$$

$$dz = -\frac{dy}{y^2}$$

Sur $E \cap U_x \cap U_y$, on prend la forme $\frac{dy}{3u^2}$

Sur $(E \cap U_x \cap U_y) \cap (P \cap U_z)$ la forme $-\frac{dx}{3y^2}$ et $\frac{dy}{3u^2}$ coïncident

On obtient une 1-forme holomorphe sur E .

VIII

1)

$$\begin{cases} 3x^2y + z^3 = 0 \\ 3y^2z + x^3 = 0 \\ 3z^2x + y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

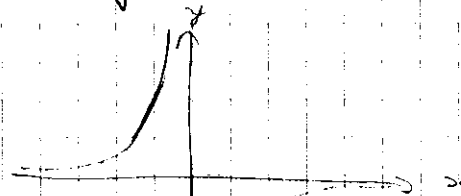
$$\begin{cases} y = -\frac{z^3}{3x^2} \\ \frac{z^3}{3x^2} + x^3 = 0 \\ 3z^2x - \frac{2z^3}{27x^3} = 0 \end{cases}$$

impossible dans $\mathbb{P}^2$

donc E est et $g = 3$.

Sur U_z , $f(x, y) = x^3y + y^3 + \infty$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + 1$$



Sur $U_z \cap U \frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial x}}$

Sur $U_z \cap U \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}$

} donne une 1-forme sur $E \cap U_z$

$Q \cap (z=0)$ ne finit de points : 4 points complexes avec multiplicités

$$[a:G:0]$$

$$a \neq 0 \quad x = \frac{1}{x} \quad y = \frac{1}{y}$$

Sur $(U_z \cap Q) \cap (U_x \cap Q) \quad x = \frac{x}{2} = \frac{1}{4} \quad y = \frac{y}{2} = \frac{1}{4}$

$$-dx = \frac{dy}{y^2} \quad f(x, y) = F(x, y, 1) = F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1\right) = \frac{1}{4} F(1, 1, 1)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{1}{y}, \frac{y}{y}, z\right) \\ &= \frac{1}{y} \frac{\partial F}{\partial y}(1, x, y) = \frac{1}{y} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \\ &= \frac{1}{y} (1 + 3x^2 y) = \frac{1}{y} + 3 \frac{x^2 y}{y}\end{aligned}$$

Sur $U_x \cap \mathcal{C}$ on écrit :

$$\frac{y \, dy}{\frac{\partial g}{\partial y}} \quad \text{si} \quad \frac{\partial g}{\partial x} \neq 0.$$

Si non, comme $\frac{\partial g}{\partial x} \, dx + \frac{\partial g}{\partial y} \, dy = 0$ on prend $-\frac{y \, dy}{\frac{\partial g}{\partial y}}$

Sur $U_y \cap \mathcal{C}$ $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)$

$$R(\lambda, t) = F\left(\lambda, \frac{1}{t}, t\right) = \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\lambda}{t}, \frac{1}{t}, t\right)$$

avec $\lambda = \frac{x}{y}$, $t = \frac{z}{y}$

$$= \frac{1}{t^3} \frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, 1, t)$$

$$= \frac{1}{t^3} \frac{\partial R}{\partial \lambda}(\lambda, t)$$

on prend $-\frac{t \, dt}{\frac{\partial R}{\partial \lambda}}$ si $\frac{\partial R}{\partial \lambda} \neq 0$.

Si non on a la relation $t \frac{dt}{\frac{\partial R}{\partial t}} \neq 0$

on a $R^*(x, \Omega^* x) = 3$

pour trouver les deux centres on fait

sur $U_z \cap \mathcal{C}$: $-\frac{P(x, y, z)}{P(x, y)} \frac{dz}{\frac{\partial P}{\partial z}}$

sur $U_x \cap \mathcal{C}$: $P\left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right) \propto \frac{dy}{\frac{\partial P}{\partial y}}$

$\frac{1}{y^2} P(1, y, y) \propto y \leq 1$ on deg $\{[x, y, z]\} = 3$

De manière générale, si C est une courbe algébrique plane lisse de degré d , définie par $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$

la forme définie sur $U_2 \cap \mathbb{C}^2$ par $(x, y) \mapsto \frac{\frac{dF}{dZ}}{\frac{dF}{dY}} = \frac{dP}{dY} + \dots$

$$\text{et } P(x, y) = \frac{\frac{dF}{dZ}}{\frac{dF}{dX}} = \frac{dP}{dX} + \dots$$

se prolonge en une 1-forme holomorphe sur C si $\deg P \leq d-3$

$$\dim \mathbb{C}[X, Y, Z]_{d-3} = \binom{d-3+2}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

$$\mathbb{C}[X, Y, Z]_n \cong \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & X^2 & & & & Y^3 & & Z \end{matrix} \quad (n+2)$$

III $\Rightarrow$ on a $P_1, \dots, P_n, P_\infty$ = points distincts.

on cherche $f = 0, \dots, 0, 1$.

Soit x_0 un point auxiliaire

$$R^0(X, \mathcal{O}((n+2g+1)x_0 - \sum_{i=1}^n P_i)) = ?$$

$$R^0(X, \mathcal{O}((n+2g-1)x_0 - \sum_{i=1}^{n-1} P_i)) = ?$$

$$\text{Si } \deg L > 2g-2 \text{ alors } R^0(X, L) = \deg L + 1 - g + \underbrace{R^0(\Omega_X^1 \otimes L^*)}_{=0}$$

$$\text{d'où } R^0(X, \mathcal{O}((n+2g-1)x_0 - \sum_{i=1}^n P_i)) = 2g-1 + 1 - g = g$$

$$R^0(X, \mathcal{O}((n+2g-1)x_0 - \sum_{i=1}^{n-1} P_i)) = g+1$$

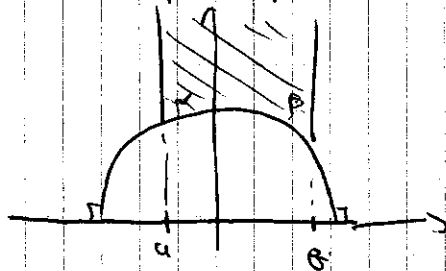
donc f existe

VII) 1) on prend $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i.e. $z \mapsto z+1$.

2) $-\frac{1}{2}$ point fixe i.e. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) $-1 < a < b < 1$

$$A = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1, a \leq x \leq b \}$$



Métrique Poincarienne $\frac{|dz|^2}{(Im z)^2} = R.$ même les valeurs T_z pp en a de $Im z$

Métrique Riemannienne $so R. = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$

Métrique euclidienne sur $\mathbb{H}$ induite par celle de $\mathbb{R}^2$ $dx^2 + dy^2$ associée de $\mathbb{H}$

$$\int_A \frac{dx dy}{y^2} = \int_{x=a}^b \int_{y=\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \frac{dx dy}{y^2}$$

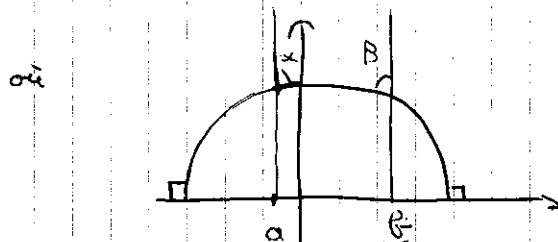
$$= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \arcsin(b) - \arcsin(a)$$

$$= \arccos(a) - \arccos(b)$$

$$\text{en posant } f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{f'(a)}{\sqrt{f'(a)^2 + 1}} = \frac{-\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}}{\sqrt{\frac{a^2 + 1 - a^2}{1-a^2}}} = -a \text{ et } \alpha \in]0, \pi[\text{ car } a \in]-1, 1[$$



$$(\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = a.$$

$$\cos(B) = \frac{-f'(b)}{\sqrt{f'(b)^2 + 1}} = b \text{ et } B \in]0, \pi[\text{ car } b \in]-1, 1[$$

d'où oncos $G = P$ et oncos $a = \pi - \alpha$

donc $\int_A = \pi - \alpha - \beta$

VIII) 1) La courbe est elliptique donc $g = \frac{(d-1)(1-2)}{2} = \frac{(3)(2)}{2} = 3$

2) $\psi: Q \rightarrow Q$ est d'ordre 3.
 $(x, y, z) \mapsto (z, x, y)$

3) $\omega = e^{\frac{2\pi}{3}}$

$$F(\omega X, \omega^4 Y, \omega^2 Z) = \frac{\omega^3}{1} \omega^4 X^3 Y + \frac{\omega^{12}}{1} \omega^2 Y^3 Z + \frac{\omega^6}{1} \omega^3 Z^3$$

$$= F(X, Y, Z)$$

donc $\psi: Q \rightarrow Q$ est bien défini
 $(x, y, z) \mapsto (\omega X, \omega^4 Y, \omega^2 Z)$

de réciproque $\psi^{-1}(X, Y, Z) = (\omega^6 X, \omega^3 Y, \omega^5 Z)$

On cherche minimal tel que $\psi^d = \text{id}_Q$

ie $\begin{cases} (\omega X)^d = X \\ (\omega^3 Y)^d = Y \\ (\omega^5 Z)^d = Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega^d = 1 \\ \omega^{3d} = 1 \\ \omega^{5d} = 1 \end{cases}$ et $d > 0$ min

$\Leftrightarrow \begin{cases} d \equiv 0 \pmod{7} \\ 3d \equiv 0 \pmod{7} \\ 5d \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}$ et $d > 0$ min

$\Leftrightarrow d = 7$

donc ψ est d'ordre 7

4) $a = \omega^5 - \omega^2$ $b = \omega^3 - \omega^4$ $c = \omega^6 - \omega$

$$F(ax + by + cz, bx + cy + az, cx + ay + bz)$$

$$= (ax + by + cz)^3 (bx + cy + az) + (bx + cy + az)^3 (cx + ay + bz) \\ + (cx + ay + bz)^3 (ax + by + cz).$$

=

de plus

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & a+b+c \\ b-a & c-b & 0 \\ c-a & a-b & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(a+b+c) [(a-b)^2 + (b-c)(a-c)]$$

$$= -(a+b+c) [a^2 - ab + b^2 - ac - bc + c^2]$$

$$\text{or } ab + ac + bc = 0 \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 + c^2 = -7$$

$$\text{donc } \det(\quad) = 7(a+b+c) \neq 0.$$

c'est donc un isomorphisme

prendre $\frac{i}{\sqrt{7}} a$, $\frac{i}{\sqrt{7}} b$, $\frac{i}{\sqrt{7}} c$ et on aura un automorphisme

d'ordre 2.

$$5) \text{ donc } \text{ord}(G) \geq 2 \times 3 \times 7 = 42 \\ \left\{ \begin{matrix} 168 \end{matrix} \right\}$$

II) 1) $\dim_{\mathbb{C}} H^0(T, \Omega_T^1) = g = 1$ et dz est une 1-forme différentielle sur $\mathbb{C}$

Soit $z \in \mathbb{C}$ alors $H(a, b) \subset \mathbb{C}^2$

$$z = z + a + b\tau \text{ dans } T$$

$$\text{et } dz = d(z + a + b\tau)$$

dans dz est une 1-forme différentielle sur T .

2) on $\int_{[0,1]} dz = 1$ donc $\int_{\mathbb{C}} dz$ est normalisée.

$$\text{donc } \alpha(D) = \int_{[0,1]} dz + \int_{[0,1/2]} dz + 2 \int_{[0,1/2]} dz$$

$$= \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2}$$

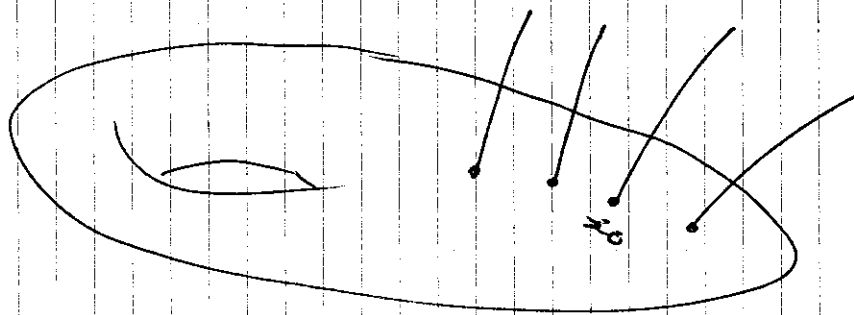
$\neq 0$ [périodes]

donc ce n'est pas principal.

II) 1) L fibre différentielle en droite complexes sur X .

Soit $x_0 \in X$

$$\begin{aligned} H^0(X, L) &\rightarrow L_{x_0} \\ &\rightarrow \Delta(x_0) \end{aligned}$$



On note $N = \dim H^0(X, L) < \infty$

• Si $N = 0$, $0 \leq N$

• Si $N = 1$, On choisit x_1 tel qu'il existe $s_1 \in H^0(X, L)$, $s_1(x_1) \neq 0$

• Si $N = 2$, $H^0(X, L) \rightarrow L_{x_1} \oplus L_{x_0}$
 $\rightarrow (\Delta(x_1), \Delta(x_0))$

Soit (α_1, α_2) fibre dans $H^0(X, L)$

$$\text{Si } \forall x_0 \in X \quad \det \begin{pmatrix} \alpha_1(x_1) & \alpha_2(x_1) \\ \alpha_1(x_0) & \alpha_2(x_0) \end{pmatrix} = 0.$$

$$\text{alors } \alpha_2(x_0) = \frac{\alpha_2(x_1)}{\alpha_1(x_1)} \alpha_1(x_0) = \lambda \alpha_1(x_0). \quad \text{contradiction}$$

II) c'est une courbe algébrique plane et $g=1$ n'est pas possible

III) 1). 1) on a $H^0(X, L_{(R-1)x_0}) \subset H^0(X, L_{(R)x_0})$.

$$\text{donc } c_R(x_0) \geq 0.$$

par le théorème de Riemann-Roch.

$$c_R(x_0) = 1 + h^0(X, \Omega_X^1(-(R-1)x_0)) - h^0(X, \Omega_X^1(-Rx_0)).$$

$$\text{on } h^0(X, \Omega_X^1(-Rx_0)) \subset h^0(X, \Omega_X^1(-(R-1)x_0)).$$

$$\text{donc } c_R(x_0) \leq 1.$$

$$\text{ie } 0 \leq c_R(x_0) \leq 1.$$

$$2). \sum_{R=1}^{2g-1} c_R(x_0) = h^0(X, L_{(2g-1)x_0}) - 1 \quad \text{par une somme télescopique}$$

$$= 2g-1 - g+1 - 1 \quad \text{par P.R de Riemann-Roch}$$

$$\text{avec } h^0(X, \Omega_X^1(-(2g-1)x_0)) = 0$$

$$\text{car } 2g-1 > 2g-2$$

$$= g-1.$$

3) donc il y a $(2g-1) - (g-1) = g$ fonctions méromorphes sur X , holomorphes sur $X - \{x_0\}$, avec un pôle simple exactement

$$R \in \{1, 2, \dots, 2g-1\}$$

2) 4) par comparaison de π et d'une fonction méromorphe de pôle ∞

5) par la formule de Riemann Hurwitz

on a $\{ \text{points de Weierstrass} \} \subset \{ \text{points de ramification} \}$
en comparant le cardinal c et on se rend compte qu'ils sont identiques.

6) Par Riemann Hurwitz : réponse ?

7) pour les paires on trouve des fonctions méromorphes
de plus comme π et η où η est impair.
ce sont les nombres impairs exactement

Partiel M2 : Surfaces de Riemann

Les notes de cours et de TD sont autorisées. Les autres documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables. Il est conseillé d'étudier les questions dans l'ordre.

1. Préliminaires

Dans tout l'exercice, X désignera une surface de Riemann connexe compacte de genre g et x_0 un point de X .

1) Déterminer explicitement une fonction méromorphe sur la droite projective $\mathbb{P}^1$ (muni d'un repère projectif), holomorphe sur $\mathbb{P}^1 - \{[0 : 1], [1 : 0]\}$ et avec exactement un pôle d'ordre 1 en $[0 : 1]$ et un pôle d'ordre 1 en $[1 : 0]$.

2) Soit a un point de la droite projective $\mathbb{P}^1$. Existe-t-il une 1-forme méromorphe non nulle sur $\mathbb{P}^1$ holomorphe sur $\mathbb{P}^1 - \{a\}$ avec un pôle d'ordre inférieur à 1 en a ? et avec un pôle d'ordre inférieur à 2 ? et avec un pôle d'ordre inférieur à 3 ?

3) Soit a, b, c, d des nombres complexes. Sous quelle condition l'application $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, $[X : Y] \mapsto [aX + bY : cX + dY]$ est-elle bien définie ? Sous quelle condition est-elle un biholomorphisme ?

4) Montrer qu'il existe une fonction méromorphe non constante holomorphe sur $X - \{x_0\}$ et avec un pôle d'ordre inférieur à $g + 1$ en x_0 .

5) Soit un revêtement ramifié $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Montrer que les diviseurs $\pi^{-1}([0 : 1])$ et $\pi^{-1}([1 : 0])$ (comptés avec multiplicités) sont linéairement équivalents.

2. Sections holomorphes de fibrés en droites complexes

Dans tout l'exercice, X désignera une surface de Riemann connexe compacte de genre g au moins égal à 1.

1) Soit x_0 un point de X et L_{x_0} le fibré en droites associé au diviseur x_0 . Calculer $h^0(X, L_{x_0})$.

2) En déduire $h^0(X, \Omega_X^1 \otimes L_{-x_0})$.

3) Soit x_0 et x_1 deux points (éventuellement égaux) de X . Comparer $h^0(X, \Omega_X^1 \otimes L_{-x_0})$ et $h^0(X, \Omega_X^1 \otimes L_{-x_0-x_1})$.

4) Montrer que $h^0(X, L_{x_0+x_1}) \leq 2$.

3. Courbes hyper-elliptiques

Dans tout l'exercice, X désignera une surface de Riemann connexe compacte de genre g . Une surface de Riemann est dite *hyper-elliptique* si elle se réalise comme revêtement ramifié de degré 2 de la droite projective $\mathbb{P}^1$.

3.1. Revêtements ramifiés. —

- 1) Montrer que les surfaces de Riemann de genre nul sont hyper-elliptiques.
- 2) Montrer que les surfaces de Riemann de genre 1 sont hyper-elliptiques.
- 3) Montrer que les surfaces de Riemann de genre 2 sont hyper-elliptiques.
- 4) Déterminer le nombre de points de ramification d'un revêtement ramifié $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ de degré 2 en fonction du genre de X .

3.2. Corps de fonctions. —

- 5) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un corps K soit isomorphe au corps des fonctions méromorphes d'une surface de Riemann X connexe compacte hyper-elliptique.
- 6) Montrer que X de genre au moins égal à 1 est hyper-elliptique si et seulement si il existe deux points (éventuellement égaux) x_0 et x_1 de X tels que $h^0(X, L_{x_0+x_1}) = 2$.
- 7) On suppose que X est hyper-elliptique de genre au moins égal à 1. Soit f et g deux fonctions méromorphes de degré 2 sur X . Soit P_f et P_g le diviseur de leur pôle. On admettra qu'ils sont linéairement équivalents. Montrer qu'il existe une fonction méromorphe non nulle h et des constantes a, b, c, d telles que

$$\begin{aligned} g &= ah + bhf \\ 1 &= ch + dhf. \end{aligned}$$

- 8) Montrer que g est la composée de f par un biholomorphisme de $\mathbb{P}^1$.

4. Points de Weierstrass

Dans tout l'exercice, X désignera une surface de Riemann connexe compacte de genre g supérieur à 2 et x_0 un point de X .

4.1. Sauts de Weierstrass. —

- 1) Pour tout entier k strictement positif, on note $c_k(x_0) := h^0(X, L_{(k)x_0}) - h^0(X, L_{(k-1)x_0})$. Montrer que $0 \leq c_k(x_0) \leq 1$.
- 2) Montrer que $\sum_{k=1}^{2g-1} c_k(x_0) = h^0(X, L_{(2g-1)x_0}) - 1 = g - 1$.
- 3) En déduire le nombre d'entiers k entre 1 et $2g - 1$ tels qu'il n'existe pas de fonctions méromorphes sur X , holomorphes sur $X - \{x_0\}$, avec un pôle d'ordre exactement k .

4.2. Points de Weierstrass et courbes hyper-elliptiques. —

On dit qu'un point x_0 de X est de Weierstrass s'il existe une fonction méromorphe sur X , holomorphe en dehors de x_0 et avec un pôle d'ordre inférieur à g en x_0 .

- 4) On suppose que X est hyper-elliptique. Montrer qu'aux points x_r de ramification de $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ de degré 2, il existe une fonction méromorphe, holomorphe sur $X - \{x_r\}$ avec un pôle d'ordre 2 en x_r .
- 5) En déduire que les points de ramification sont des points de Weierstrass.
- 6) En déduire le nombre minimal de points de Weierstrass d'une surface de Riemann hyper-elliptique de genre $g \geq 2$.
- 7) Déterminer les entiers k entre 1 et $2g - 1$ tels qu'il n'existe pas de fonctions méromorphes sur X , holomorphes sur $X - \{x_r\}$, avec un pôle d'ordre exactement k .

Devoir : corrigé rapide

I) 1) $L_{X,Y} \rightarrow \frac{X}{Y} + \frac{Y}{X}$ par exemple.

2) Riemann - Rook

$$R^0(X, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1 \otimes L_{-R_a}) = R^0(X, L_{-R_a}) + R + g - 1$$

Si $R=1$: $R^0(X, L_{-a}) = 0 \leftarrow \deg L_{-a} = -1 < 0$

Si $R=2$: $H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L_{-2a}) = \mathbb{C} \cdot d\left(\frac{X}{Y}\right)$

Si $R=3$: $H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L_{-3a}) = \mathbb{C} \cdot d\left(\frac{X}{Y}\right) \oplus \mathbb{C} \cdot \frac{X}{Y} \cdot d\left(\frac{X}{Y}\right)$

3) $\text{ad} - R_C \neq 0$

4) Riemann - Rook

5) $\text{diviseur}(\pi^{-1}(p))$ est de deg constant $\forall p \in \mathbb{P}^1$

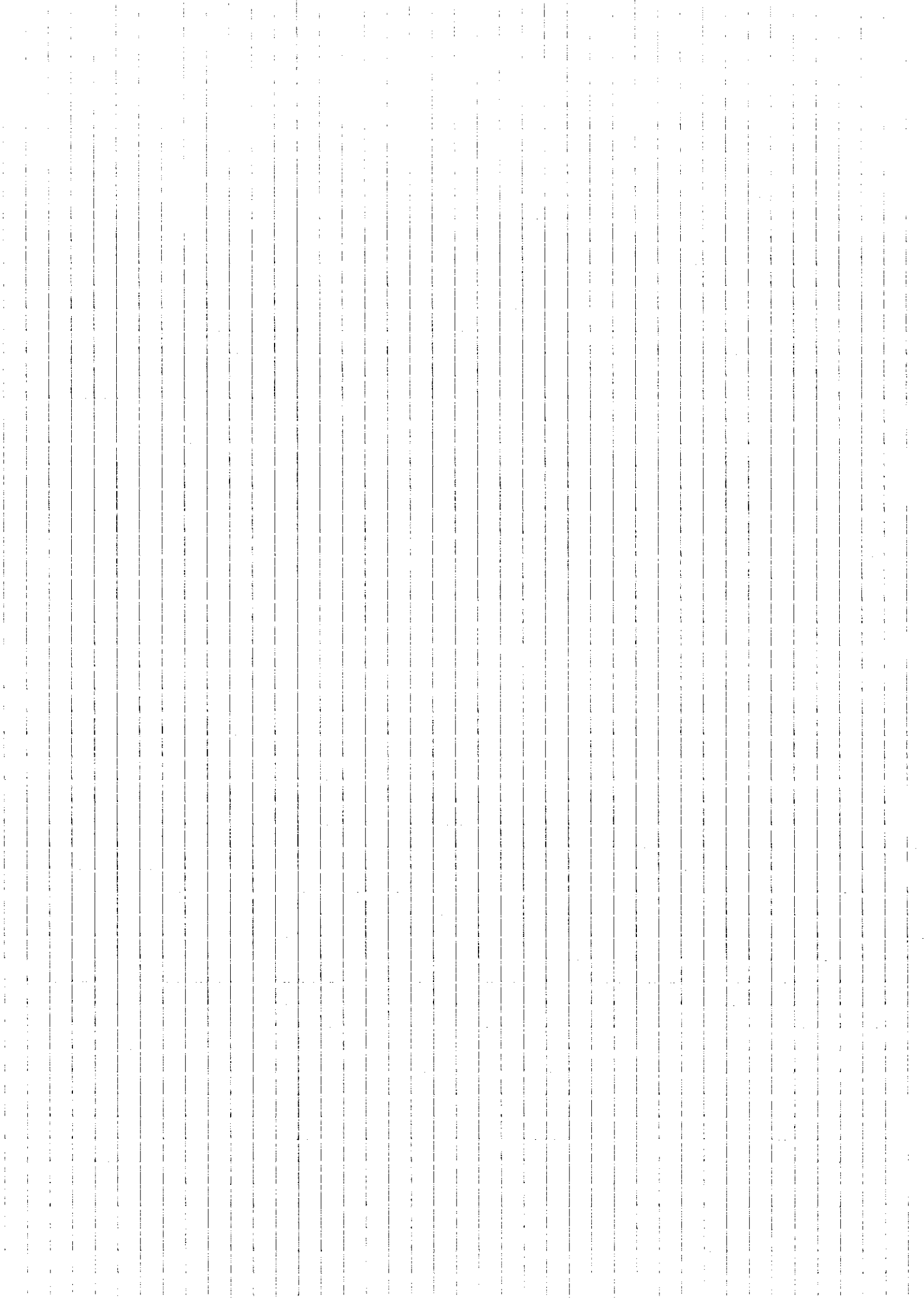
donc la différence est un diviseur principal

III) 1) $R^0(X, L_{-a}) = 1$ (c'est les constantes)

2) $R^0(X, \Omega_X^1 \otimes L_{-a-a_1}) = g-1 < g = R^0(X, \Omega_X^1)$

3) $H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L_{-a-a_1}) \subset H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L_{-a-a_2})$
 $R^0(X, \Omega_X^1 \otimes L_{-a-a_1}) \leq R^0(X, \Omega_X^1 \otimes L_{-a}) = g-1$

4) $R^0(X, L_{-a-a_1}) = R^0(X, \Omega_X^1 \otimes L_{-a-a_1}) + 1 + 1 - g \leq 2$



Examen M2 : Surfaces de Riemann

Lundi 17 décembre 2007

Les notes de cours et de TD sont autorisées. Les autres documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables. Il est conseillé d'étudier les questions dans l'ordre.

1. Préliminaires

- 1) Déterminer la dimension de l'espace des polynômes homogènes de degré n en trois variables.
- 2) Déterminer le cardinal de $PSL(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$
- 3) Montrer que $2i$ n'est fixé par aucun élément de $PSL(2, \mathbb{Z})$ autre que l'identité.

2. Calcul de genre d'une courbe algébrique plane

On supposera $\mathbb{P}^2$ muni d'un repère projectif et de coordonnées homogènes associées, notées $[X : Y : Z]$. On notera $U_Z : \{[X : Y : Z] \in \mathbb{P}^2, Z \neq 0\}$ et $x := X/Z, y := Y/Z$ les coordonnées holomorphes associées.

- 1) Soit d un entier naturel non nul. On considère la courbe C_d d'équation $X^d + Y^d + Z^d = 0$. Montrer que C_d est lisse.
- 2) Expliciter un recouvrement de C_d en ouverts de cartes.
- 3) Montrer que la restriction π à C_d de l'application $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1, [X : Y : Z] \mapsto [X : Y]$ est bien définie.
- 4) Montrer que π admet dans chaque ouvert de cartes une expression à l'aide de fonctions holomorphes. En déduire que π est holomorphe et non constante.
- 5) Déterminer le degré et les points de ramification de l'application π .
- 6) Retrouver le genre de C_d à l'aide de l'application π .

3. Plongement canonique d'une surface de Riemann compacte

On rappelle qu'une surface de Riemann compacte X de genre au moins égal à 1 est hyperelliptique si et seulement si il existe deux points (éventuellement égaux) x_0 et x_1 de X tels que $h^0(X, L_{x_0+x_1}) = 2$.

Montrer que toutes les surfaces non-hyperelliptiques se plongent dans un espace projectif à l'aide des sections du fibré canonique Ω^1 .

4. Application d'Abel-Jacobi

Donner une condition nécessaire et suffisante sur une surface de Riemann X qui assure que l'application d'Abel Jacobi $S^2 X \rightarrow Jac(X)$ est injective.

5. Points de Weierstrass

Soit X une surface de Riemann connexe compacte de genre g supérieur à 2. On dit qu'un point x_0 de X est de *Weierstrass* s'il existe une fonction non constante méromorphe sur X , holomorphe en dehors de x_0 et avec un pôle d'ordre inférieur à g en x_0 .

1) Montrer que x_0 est de Weierstrass si et seulement si $H^0(X, \Omega_X^1(-gx_0))$ est non nul.

2) Soit $(\Phi_i)_{i=1,\dots,g}$ une base de l'espace des 1-formes holomorphes sur X . Soit x_0 un point de X et z une coordonnée holomorphe au voisinage de x_0 . Soit $\Phi_i = u_i(z)dz$ l'expression locale de Φ_i . Montrer que le point de coordonnée z est un point de Weierstrass si et seulement si

$$[u_1, \dots, u_g] := \det \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) & \dots & u_g(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) & \dots & u_g'(z) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_1^{(g-1)}(z) & u_2^{(g-1)}(z) & \dots & u_g^{(g-1)}(z) \end{pmatrix} = 0.$$

3) Montrer que le déterminant précédent définit une section holomorphe du fibré $(\Omega_X^1)^{\otimes \frac{g(g+1)}{2}}$.

4) Vérifier dans le cas $g = 2$ que la fonction précédente est non nulle. *On l'admettra dans le cas général.*

5) En déduire le nombre maximal de points de Weierstrass de X .

6. Automorphismes et points de Weierstrass

Dans tout l'exercice, X désignera une surface de Riemann connexe compacte de genre g supérieur à 2 et x_0 un point de X . On supposera que X admet au moins $2g + 3$ points de Weierstrass distincts. *On peut montrer que cette hypothèse est satisfaite pour toutes les surfaces de Riemann compactes non hyperelliptiques. On pourra admettre le résultat de l'exercice précédent.*

1) Montrer que les automorphismes de X préservent globalement l'ensemble des points de Weierstrass de X . En déduire un morphisme de $\text{Aut}(X)$ dans un groupe fini.

2) Soit T un automorphisme de X différent de l'identité et x_0 un point non fixé par T . Montrer qu'il existe une fonction non constante méromorphe f holomorphe sur $X - \{x_0\}$ avec un pôle d'ordre inférieur à $g + 1$ en x_0 .

3) En considérant $f - f \circ T$ déterminer le nombre maximal de points fixes de T .

4) Montrer que X n'a qu'un nombre fini d'automorphismes, et à l'aide de l'exercice précédent, donner un majorant de ce nombre.

7. Géométrie hyperbolique

On considère le morphisme de groupes r qui à une matrice de $PSL(2, \mathbb{Z})$ associe la matrice de $PSL(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ obtenue par réduction modulo 7 des coefficients. On notera $\Gamma(7)$ son noyau. *On admet que le morphisme r est surjectif*

1) Montrer en étudiant les vecteurs propres que les éléments A de $SL(2, \mathbb{R})$ dont la trace vérifie $(\text{trace } A)^2 \geq 4$ n'ont pas de points fixes dans le demi-plan $\mathcal{H}$ de Poincaré.

2) En déduire que $\Gamma(7)$ agit sans point fixes sur $\mathcal{H}$.

On admet que $\Gamma(7)$ agit proprement discontinument sur $\mathcal{H}$ et on note X_7 la surface de Riemann quotient $\Gamma(7) \backslash \mathcal{H}$.

3) Montrer que les éléments de $PSL(2, \mathbb{Z})/\Gamma(7)$ agissent naturellement à gauche par biholomorphismes sur X_7 .

4) Déterminer un minorant du cardinal du groupe des automorphismes de X_7