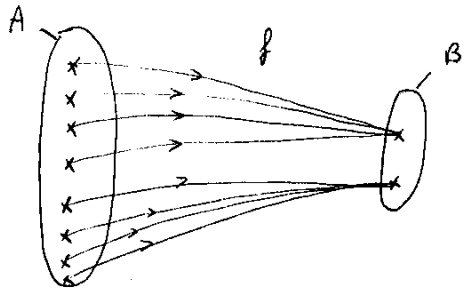
Corrigé du premier devoir sur table

A02
2007/08

Exercice 1 : C'est du cours

Exercice 2 :

1 -



2 - Tous les éléments de B admettent un antécédent par f.
Quatre éléments distincts de A ont la même image par f.
L'application f est donc surjective mais pas injective et donc pas bijective.

3 - On utilise le principe des bergers.
Les images réciproques $(f^{-1}(b))_{b\in B}$ forment une partition de A en card B ensembles à 4 éléments. Par conséquent, l'ensemble A possède $4 \times \text{card } B = 4 \times 8 = 32$ éléments.

Exercice 3 :

1 - $\overline{100110}^{(2)} = 0\times2^0 + 1\times2^1 + 1\times2^2 + 0\times2^3 + 0\times2^4 + 1\times2^5 = 2 + 4 + 32 = 38 = \overline{38}^{(10)}$

2 - On effectue les divisions euclidiennes successives

$$\begin{aligned} 982 &= 7\times140 + 2 \\ 140 &= 7\times20 + 0 \\ 20 &= 7\times2 + 6 \\ 2 &= 7\times0 + 2 \end{aligned}$$

Donc $\overline{982}^{(10)} = \overline{2602}^{(7)}$

3 - Le reste de la division euclidienne de $\overline{6541}^{(7)}$ par 7 est 1
Ce nombre n'est donc pas divisible par 7.

Exercice 4 :

1 - $u_2 = 5u_1 - 6u_0 = -1$

$u_3 = 5u_2 - 6u_1 = -11$

$u_4 = 5u_3 - 6u_2 = -49$

2 - On utilise une récurrence forte

$2^{0+1} - 3^0 = 2 - 1 = 1 = u_0$

$2^{1+1} - 3^1 = 4 - 3 = 1 = u_1$

Soit $n \geq 1$ tel que pour tout entier naturel $p \leq n$, $u_p = 2^{p+1} - 3^p$

$u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}$

$= 5(2^{n+1} - 3^n) - 6(2^n - 3^{n-1})$

$= (10-6)2^n - (15-6)3^{n-1}$

$= 2^{n+2} - 3^{n+1}$

Donc pour tout entier naturel $p \leq n+1$ $\quad u_p = 2^{p+1} - 3^p$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = 2^{n+1} - 3^n$.

Exercice 5 :

1 - $78\,908 = 789 \times 100 + 8$

100 est multiple de 4, 8 aussi et donc aussi 78908.

2 - Soit k un entier supérieur à 2

$10^k = 100 \times 10^{k-2}$ est donc divisible par 100 donc par 4.

3 - Un entier est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres en écriture décimale est divisible par 4.

En effet, si $n = \overline{a_d a_{d-1} \cdots a_3 a_2 a_1 a_0}^{(10)}$

$n = \overline{a_d \cdots a_2}^{(10)} \, 10^2 + \overline{a_1 a_0}^{(10)}$

$n \equiv \overline{a_1 a_0}^{(10)} \quad [4]$

78 n'est pas divisible par 4, donc 5878978 non plus

Bonus

1- $C_k^1 x + C_k^2 x^2 - C_k^3 x^3 + \cdots + (-1)^k C_k^k x^k$

$= (1-x)^k$

Cette somme n'est donc nulle que pour $x = 1$.