EXERCICES SUR LES ESPACES AFFINES EUCLIDIENS

1. Sur les groupes

Exercice 1 (Sur les groupes)**.**

(1) Donner la définition d'un groupe.
(2) Quelle loi naturelle fait de $\mathbb{R} - \{0\}$ un groupe ?
(3) Donner un exemple de groupe fini, un exemple de groupe non commutatif.
(4) Montrer que l'ensemble des isométries du plan affine qui conservent un carré (muni de la loi de composition) est un groupe
(5) Donner un exemple de groupe fini et non commutatif
(6) Complétez Le noyau N d'un morphisme de groupes $f\ : G \to G'$ est un sous-groupe .... (c'est à dire que ....) L'ensemble quotient G/N pour la relation d'équivalence .... peut alors être muni d'une structure naturelle de .... On obtient alors un isomorphisme de groupes entre G/N et ....
(7) Construire un isomorphisme de groupes entre l'ensemble des nombres complexes de module 1 et le groupe quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 2 (Manipulations sur les morphismes de groupes)**.**

(1) Montrer que $\{2, 5\}$ engendre $(\mathbb{Z}, +)$.
(2) Existe-t-il un morphisme de groupes f de $(\mathbb{Z}, +)$ dans lui-même tel que $f(2) = 3$ et $f(5) = 6$?
(3) Déterminer une condition sur a et b qui assure l'existence d'un morphisme de groupes f de $(\mathbb{Z}, +)$ dans lui-même tel que $f(2) = a$ et $f(5) = b$.

2. Espaces affines euclidiens

Question de cours Démontrer que dans un espace affine euclidien E la fonction $E \times E \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \|x - y\|$ est une fonction distance.

Exercice 3.

Montrer que dans un espace euclidien de dimension 3, pour tout triplet (u, v, w) de vecteurs

$$u \wedge (v \wedge w) =< u, w > v- < u, v > w.$$

$$\|u \wedge v\|^2+ < u, v >^2= \|u\|^2\|v\|^2.$$

Le produit vectoriel est-il associatif ?

Exercice 4.

Interpréter géométriquement le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} u_1x + u_2y + u_3z = 0 \\ v_1x + v_2y + v_3z = 0 \end{cases}$$

Déterminer ses solutions.

Exercice 5 (Distance entre deux droites de l'espace)**.**

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3. Pour tout couple de droites (D_1, D_2) on appelle

$$d(D_1, D_2) = \inf\{\|y_1 - y_2\|, y_1 \in D_1, y_2 \in D_2\}.$$

(1) Calculer $d(D_1, D_2)$ quand D_1 et D_2 sont concourantes.
(2) Soit $a_1 \in D_1$ et $a_2 \in D_2$. En décomposant $a_1 - a_2$ dans $\overrightarrow{D_1} + \overrightarrow{D_2} + (\overrightarrow{D_1} + \overrightarrow{D_2})^\perp$ montrer qu'il existe $x_1 \in D_1$ et $x_2 \in D_2$ tels que $d(D_1, D_2) = d(x_1, x_2)$.
(3) Montrer que pour $z_1 \in D_1$ et $z_2 \in D_2$,

$$d(D_1, D_2) = d(z_1, z_2) \iff z_1 - z_2 \in \overrightarrow{D_1}^\perp \cap \overrightarrow{D_2}^\perp.$$

(4) Montrer que si e_i est un vecteur directeur de D_i

$$d(D_1, D_2)^2 = \frac{Gram(a_1 - a_2, e_1, e_2)}{Gram(e_1, e_2)}$$

où $Gram(u_1, u_2, \cdots, u_r) := det(\langle u_i, u_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq r}$.
(5) Calculer la distance entre les deux droites données par les équations cartésiennes dans un repère orthonormé de $\mathcal{E}$:

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in D_1 \iff \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} \qquad M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in D_2 \iff \begin{cases} y + z = 1 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

Exercice 6 (Angle de deux demi-droites de même origine)**.**

Dans le plan euclidien orienté $\mathcal{P}$, on considère deux demi-droites d_1 et d_2 de même origine Ω.
a) Rappeler la forme générale d'une matrice de rotation vectorielle dans une base orthonormée directe de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Comment change cette matrice quand on change de base orthonormée ?
b) Montrer qu'il existe une unique rotation de centre Ω qui envoie d_1 sur d_2. On pourra donc définir l'angle orienté de deux demi-droites comme l'angle de la rotation qui envoie la première sur la seconde.

Exercice 7.

Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé on considère les points $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.

a) Déterminer selon la valeur de r l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2-2MB^2=r$.
b) Déterminer selon la valeur de r l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2-MB^2=r$.

Exercice 8 (Sur les homothéties translations)**.**

On travaille dans un espace affine euclidien. On rappelle que les homothéties-translations sont caractérisées par le fait qu'elles transforment toute droite en une droite parallèle. On appelle dilatation une application affine dont la partie linéaire est une homothétie vectorielle.
a) Montrer que l'ensemble des dilatations coï ncide avec l'ensemble des homothéties-translations.
b)Montrer que l'ensemble des dilatations est un sous-groupe distingué du groupe des applications affines.
c) On travaille maintenant dans le plan afine euclidien $\mathcal{P}$. Montrer qu'il existe exactement deux dilatations qui transforment un cercle donné en un cercle donné.

Exercice 9 (Inégalité isopérimétrique)**.**

On considère dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé la courbe C d'équation polaire $r=f(\theta)$ où f est une fonction continue positive sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ avec $f(-\frac{\pi}{2})=f(\frac{\pi}{2})=0$.
a) Représenter C dans le cas où $f=cos$.
b) On rappelle que l'aire de la surface S délimitée par la courbe C est donnée par

$$a(S)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}f^2(\theta)d\theta.$$

Montrer que

$$a(S)\leq\frac{\pi}{4}\left(diam(S)\right)^2.$$

3. Sur les isométries

Exercice 10 (Questions de cours)**.**

Rappeler toutes les isométries du plan euclidien et de l'espace euclidien de dimension 3, en précisant leur partie linéaire, leur point fixe, leur axe, leur composante à point fixe et leur composante de glissement.

Exercice 11.

Rappeler la décomposition d'une rotation et la déomposition d'une translation en produit de symétries orthogonales.

Quelle est la partie linéaire de la composée d'une rotation d'angle non nul (modulo 2π) et d'une translation ? Une telle composée admet-elle un point fixe ? Quelle est la nature de la composée ? Déterminer géométriquement les points fixes (s'il y en a).

Exercice 12 (Déterminer une rotation à partir d'images)**.**

Soit E un plan affine euclidien muni d'un repère cartésien orthonormé. Soient A, B, C et D les points de E dont les coordonnées sont

$$A : (0, 3), \quad B : (2, 1), \quad C : (2, 3) \quad \text{et} \quad D : (0, 1).$$

(1) Montrer que les droites (A, B) et (C, D) sont orthogonales et expliciter les coordonnées de leur point d'intersection.
(2) Prouver l'existence d'une *rotation* qui envoie A sur C, C sur B, B sur D et D sur A. Expliciter une représentation matricielle de cette rotation.

Exercice 13 (Reconnaître une application affine)**.**

Soit E un plan affine euclidien. Soient $\mathcal{R}$ un repère cartésien orthonormé de E, et $f : E \to E$ l'application affine définie dans $\mathcal{R}$ par l'égalité

$$f\big((x, y)\big) = \left(\frac{3x + 4y + 8}{5}, \frac{4x - 3y - 1}{5}\right).$$

(1) L'application f possède-t-elle des points fixes ?
(2) Démontrer que lorsque M décrit E, le milieu de $(M, f(M))$ décrit une droite dont on précisera l'équation.
(3) Démontrer que f est une isométrie dont on précisera la nature, l'axe et la composante translation.

Exercice 14 (Trouver l'isométrie)**.**

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère cartésien orthonormé. On note v la transformation de E dans E qui envoie le point de coordonnées (x, y, z) sur le point de coordonnées (x', y', z') définies par:

$$x' = \frac{2x - 2y + z + 1}{3}; y' = \frac{2x + y - 2z + 2}{3}; z' = \frac{x + 2y + 2z + 5}{3}.$$

Montrer que v est une isométrie de E. Préciser de quel type d'isométrie il s'agit. Expliciter son axe et son vecteur de glissement.

Exercice 15 (Composée d'isométries)**.**

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère cartésien orthonormé (O, i, j, k). On désigne par D la droite d'équation $(x = 0, z = 1)$ et par D' la droite d'équation $(y = 0, z = 0)$. On note S_D la symétrie par rapport à la droite D et R_θ la rotation d'axe D' et d'angle θ (en considérant la base (j, k) comme directe). On pose $\varphi = S_D \circ R_\theta$.

(1) Écrire dans la base (i, j, k) la matrice de $\overrightarrow{S_D}$, celle de $\overrightarrow{R_\theta}$ et celle de $\overrightarrow{\varphi}$. Écrire les expressions analytiques de S_D et de R_θ dans le repère (O, i, j, k).
(2) Montrer que φ est une symétrie éventuellement glissée d'axe une droite Δ.
(3) Pour tout point M de E, prouver que les milieux de $\big(M, s_\Delta(M)\big)$ et de $\big(M, \varphi(M)\big)$ sont sur Δ.
(4) En utilisant le point O, montrer que Δ passe par le point de coordonnées $(0, 0, 1)$. et est contenue dans le plan affine d'équation $x = 0$.
(5) Donner les composantes du vecteur de glissement de φ en fonction de θ.

Exercice 16 (Sur un groupe d'isométries)**.**

Dans un plan affine euclidien orienté on considère deux points distincts O et A. On note r la rotation de centre O et d'angle $2\pi/3$ et ρ la rotation de centre A et d'angle $2\pi/3$. On pose $B = r(A)$ et $C = r(B)$. Enfin on note G le groupe d'isométries engendré par r et ρ.

(1) Montrer que G ne contient que des translations et des rotations d'angle $2\pi/3$ et $-2\pi/3$.
(2) Expliciter une relation de dépendance entre les vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ (on pourra remarquer que la somme de ces vecteurs est invariante par r).
(3) Montrer que $r \circ \rho^{-1}$ et $r^{-1} \circ \rho$ sont des translations dont on précisera le vecteur (on pourra étudier l'image de A).
(4) Montrer que G contient toutes les translations de vecteur $p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$ et $p + q \in 3\mathbb{Z}$.

4. Des constructions

Exercice 17.

Construire le cercle passant par trois points donnés.

Exercice 18.

Trouver le centre d'un cercle dont on connait un arc.

Exercice 19.

Construire le cercle inscrit dans un triangle donné.

Exercice 20.

Construire la tangente à un cercle donné passant par un point donné.

Exercice 21.

Construire les tangentes communes à deux cercles.

Exercice 22.

Construire un segment $[A, B]$ connaissant son milieu I et sachant que A appartient à une droite donnée d et B à un cercle donné $\mathcal{C}$.

Exercice 23.

Construire un triangle équilatéral ABC connaissant A et sachant que B appartient à un cercle donné $\mathcal{C}$ et C à un autre cercle donné $\mathcal{C}'$.

Exercice 24.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle et $\overrightarrow{u}$ un vecteur. Construire une corde AB de $\mathcal{C}$ telle que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.

Exercice 25.

Construire un carré $ABCD$ sachant que A et C sont sur une droite D_1 donnée, B sur une droite D_2 donnée et D sur une droite D_3 donnée.

Exercice 26.

Soit d une droite. Soit $\mathcal{C}$ un cercle et A un point de $\mathcal{C}$. Construire un cercle tangent à la droite d et tangent en A au cercle $\mathcal{C}$.