Première partie

Courbes algébriques planes (Walker)

On commence l'étude des surfaces de Riemann par le cas très favorable des courbes algébriques planes, où on dispose d'outils comme des fonctions coordonnées, des droites et d'un dictionnaire algébrique (c'est à dire en termes de polynômes) des propriétés géométriques.

On supposera connus les rudiments de la théorie des anneaux des corps, la construction des espaces projectifs et l'arithmétique élémentaire des polynômes.

Rappel de théorie de l'élimination

Le but est de déterminer quand un système de polynômes admet une racine commune, ou plus généralement un facteur commun. Pour deux polynômes à coefficients dans un corps, l'algorithme d'Euclide permet de calculer le pgcd et donc de déterminer les facteurs communs.
Une réponse moins précise (sans le calcul des racines communes) mais plus simple à calculer est donnée par le résultant.

<u>Lemme</u> : Soit A un anneau intègre factoriel (càd commutatif et dans lequel tout élément a une unique factorisation en produit d'éléments irréductibles à l'ordre près)

Soit f et g deux polynômes de $A[x]$.

f et g ont un facteur commun (non constant)

$\Leftrightarrow \quad \exists\, (u,v) \in (A[x])^2 \;/\; \begin{array}{l} fu = gv \\ \deg u < \deg g \quad \text{et} \quad \deg v < \deg f \end{array}$

$\Leftrightarrow$ Les $(\deg f + \deg g)$ polynômes $f,\ xf,\ x^2 f,\ \ldots\ x^{\deg g - 1} f,\ g,\ xg,\ \ldots\ x^{\deg f - 1} g$ sont liés

$d = \deg f$

$e = \deg g$

$$\Leftrightarrow \quad \det \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & x & x^2 & & & & & \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_d & & & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & & a_d & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_d \\ b_0 & b_1 & & & b_{e-1} & b_e & & \\ & b_0 & b_1 & & & b_{e-1} & b_e & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & & & & & b_e \end{array}\right| \end{array} \begin{array}{l} \\ f \\ xf \\ \\ x^{e-1} f \\ g \\ \\ \\ x^d g \end{array} = 0$$

Ce déterminant est appelé résultant de f et g (par rapport à x).

et noté $\mathrm{res}_x(f,g)$.

Exercice : Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ calculer $\mathrm{res}_x(f, f')$

Si $f(x) = x^3 + px + q$ calculer $\mathrm{res}_x(f, f')$

Application en plusieurs variables

On utilise que si A est un anneau intègre factoriel

- $A[x_1, \dots x_{r-1}]$ aussi
- $A[x_1, \dots x_r]$ est naturellement isomorphe à $A[x_1 \dots x_{r-1}][x_r]$

Le résultant de deux polynômes f et g de $A[x_1, \dots x_r]$ par rapport à x_r est le polynôme $r \in A[x_1 \dots x_{r-1}]$ résultant par rapport à x_r de f et g vus dans $A[x_1, \dots x_{r-1}][x_r]$.

Par exemple, si K est un corps algébriquement clos ~~en particulier~~ et si f et g sont deux polynômes de $K[x, y]$ ~~comme~~ avec $\deg_y f = \deg f$, $\deg_y g = \deg g$ alors les zéros de $\mathrm{res}_y(f, g) \in K[x]$ sont les premières ~~et les parties homogènes de degré maximal n'ont pas de zéros communs~~ coordonnées des couples (x, y) solutions de

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Si F et G sont deux polynômes homogènes de $A[X_1, \dots X_r]$ (On notera le plus souvent avec des majuscules les coordonnées et les polynômes homogènes), alors $\mathrm{res}_{X_r}(F, G)$ est soit nul, soit homogène de degré $(\deg F)(\deg G)$.

Sur un exemple

$$F(X,Y,Z) = a_0(X,Y) + a_1(X,Y)Z + a_2(X,Y)Z^2 + a_3(X,Y)Z^3$$

$$G(X,Y,Z) = b_0(X,Y) + b_1(X,Y)Z + b_2(X,Y)Z^2$$

Les a_i et b_j sont homogènes en (X,Y) de degré $\deg a_i = 3-i$ $\deg b_j = 2-j$

$$R(X,Y) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & \\ & & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$t \times t^2 \times t \quad R(tX,tY) = \begin{vmatrix} t^3 a_0 & t^2 a_1 & t a_2 & a_3 & \\ & t^3 a_0 & t^2 a_1 & t a_2 & a_3 \\ t^2 b_0 & t\, b_1 & b_2 & & \\ & t^2 b_0 & t b_1 & b_2 & \\ & & t^2 b_0 & t b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times t \\ \times 1 \\ \times t^2 \\ \times t \\ \times 1 \end{array}$$

$$= t^4 \times t^3 \times t^2 \times t \times 1 \quad R(X,Y)$$

Chapitre I — Conditions suffisantes de rationalité

I) Introduction

On cherche à résoudre dans l'espace projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ des équations de la forme $F(X, Y, Z) = 0$
où $[X : Y : Z]$ est un système de coordonnées homogènes
et F un polynôme homogène.

On notera C_F le lieu des points de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dont les coordonnées homogènes vérifient l'équation $F(X, Y, Z) = 0$, et on l'appelera la courbe de F.

L'idée directrice de toute cette partie du cours est d'étudier la possibilité de <u>paramétrer</u> la courbe C_F c'est à dire de trouver une application $\phi : \mathcal{C} \to C_F$ d'une courbe "simple" qui représente au mieux les points de C_F.
Dans chaque contexte, on précisera le choix de $\mathcal{C}$ et les conditions requises sur ϕ.

Exemple : La conique (c'est à dire une courbe dont une équation est de degré 2) d'équation $3X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$

La technique classique est de choisir un point M_0 ici par exemple $[0 : 1 : 1]$ et d'associer à chaque droite Δ

passant par M_0, l'"autre" point de $\Delta \cap C_F$.

Exercice : En raisonnant dans $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$, montrer que la courbe d'équation $3X^2 + 2Y^2 - Z^2 = 0$ n'a pas de point dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$.

Le choix du corps $\mathbb{C}$ algébriquement clos comme corps de base apporte une grande simplification

Comme $(X=0)$ et $(Y-Z=0)$ sont des équations de deux droites distinctes qui passent par M_0, toute droite qui passe par M_0 a une équation de la forme

$$\Delta_{[\lambda:\mu]} \qquad \lambda X + \mu(Y-Z) = 0 \qquad \text{avec } [\lambda:\mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

C'est un <u>système linéaire</u> de dimension projective 1 paramétré par $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
On dit que c'est un <u>pinceau</u> de droites.

- Pour $\lambda \neq 0$ $\qquad X = -\frac{\mu}{\lambda}(Y-Z)$

  On peut choisir $[Y:Z]$ comme coordonnées homogènes sur $\Delta_{[\lambda:\mu]}$

  $$M\left[\underset{-\frac{\mu}{\lambda}(Y-Z)}{}\, Y:Z\right] \in C_F \iff 3\frac{\mu^2}{\lambda^2}(Y-Z)^2 + Y^2 - Z^2 = 0$$

  $$\iff (Y-Z)\left[(3\mu^2+\lambda^2)Y - (3\mu^2-\lambda^2)Z\right] = 0$$

  $$\iff M = M_0 \quad \text{ou} \quad M\left[2\lambda\mu : 3\mu^2-\lambda^2 : 3\mu^2+\lambda^2\right]$$

- Pour $\lambda = 0$ $\qquad Y = Z$, on peut choisir $[X:Z]$ comme coordonnées homogènes sur $\Delta_{[0:1]}$

$M\,[X : Z : Z] \in C_F \iff X^2 = 0$

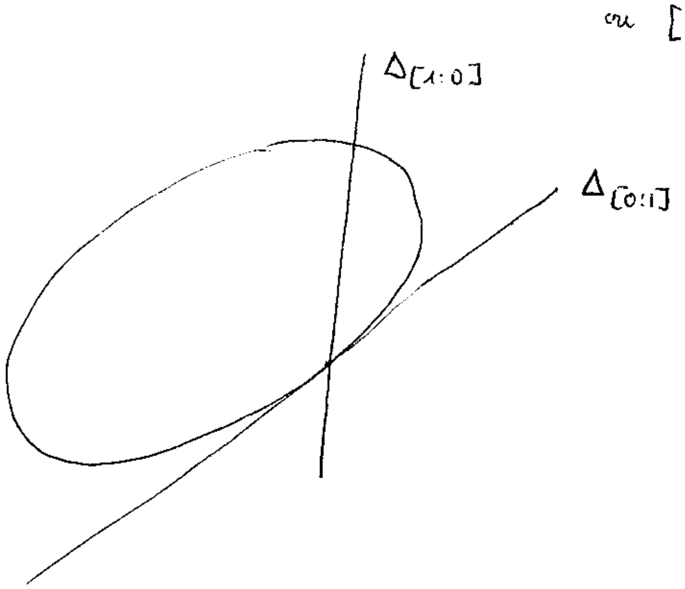
Donc $M_0[0:1:1]$ est un point double de $\Delta_{[0:1]} \cap C_F$.

Conclusion : L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\phi} & C_F \\ [\lambda : \mu] & \longmapsto & [2\lambda\mu : 3\mu^2 - \lambda^2 : 3\mu^2 + \lambda^2] \end{array}$$

réalise une bijection, donnée par des polynômes.
entre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et C_F. La bijection réciproque est localement donnée par des polynômes $[3X : (Y+Z)]$ autour M_0 ou $[(Z-Y) : X]$ $[0:1:-$

On dit que C_F est une <u>courbe rationnelle</u>.



On dit que ϕ est une application birégulière.

Autre exemple : La cubique (degré 3) d'équation $ZY^2 = X^2(Z-X)$

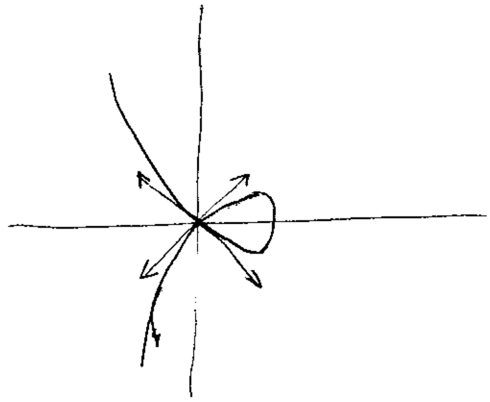
Au voisinage du point $[0:0:1]$, on peut choisir comme coordonnées affines $x = \frac{X}{Z}$ $y = \frac{Y}{Z}$

L'équation devient $y^2 = x^2(1-x)$

Le point $[0:0:1]$ est un point double avec ses deux tangentes

$y^2 = x^2 - \cancel{x^3}$

$(y-x)(y+x) = 0$



Les droites passant par M_0 forment le pinceau

$$\Delta_{[\lambda:\mu]} \qquad \lambda(Y-X) + \mu(Y+X) = 0.$$

- Pour $\lambda = 0$ $\Delta_{[0:1]}$ $Y + X = 0$

  On peut choisir $[X:Z]$ comme coordonnées homogènes

  $M[X:-X:Z] \in C_F \iff X^3 = 0$

  M_0 est un point triple.

- De même pour $\mu = 0$ M_0 est un point triple de $\Delta_{[\lambda:0]} \cap C_F$

- Pour $\lambda \neq 0$ on peut choisir $T = X+Y$ et Z comme coordonnées homogène sur $\Delta_{[\lambda:\mu]}$

  $\lambda(X-Y) = \mu T$
  $\lambda(X+Y) = \lambda T$

  $M[(\lambda+\mu)T : (\lambda-\mu)T : 2\lambda Z] \in C_F$

  $\iff T^2[8\lambda^2\mu Z - (\lambda+\mu)^3 T] = 0$

  $\iff$ M_0 est point double et l'autre point $[4(\lambda+\mu)\lambda\mu : 4(\lambda-\mu)\lambda\mu : (\lambda+\mu)^3]$

L'application $\qquad \mathbb{P}^1 \longrightarrow C_F$

$$[\lambda:\mu] \longmapsto [\,4(\lambda+\mu)\lambda\mu \; : \; 4(\lambda-\mu)\lambda\mu \; : \; (\lambda+\mu)^3\,]$$

est surjective, donnée par des polynômes, mais M_0 a deux antécédents.

En dehors de M_0 $\qquad C_F - M_0 \longrightarrow \mathbb{P}^1$

$$[X:Y:Z] \longmapsto [X+Y \; : \; X-Y]$$

est la bijection réciproque.

II) Rationalité

Définition : On dit qu'un couple $(a(t), b(t)) \in \mathbb{C}(t)^2$ de fractions rationnelles est un <u>paramétrage rationnel</u> de la courbe algébrique affine plane C_f si

- en dehors d'un nombre fini de complexes t

  $f(a(t), b(t)) \cancel{1} = 0 \qquad M[a(t), b(t), \cancel{1}] \in C_f$

- pour tout point M de C_f sauf peut-être un nombre fini il existe un unique $t \in \mathbb{C}$ / $\quad M = [a(t), b(t), 1]$.

Une courbe algébrique plane est dite <u>rationnelle</u> si elle admet un ouvert affine avec un paramétrage rationnel.

<u>Proposition</u> : Une courbe algébrique plane est <u>rationnelle</u> si ~~elle~~ ~~admet~~ existe une application polynomiale génériquement surjective et génériquement injective $\phi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow C_F \subset \mathbb{P}^2$

<u>Dem</u> : Si C_F est rationnelle et si $(a(t), b(t)) \in (\mathbb{C}(t))^2$ est un paramétrage rationnel. On écrit $a(t) = \dfrac{A(t)}{D(t)}$ $b(t) = \dfrac{B(t)}{D(t)}$

avec A, B et D des polynômes de $\mathbb{C}[t]$ sans facteurs commun. On considère $d = \max(\deg A, \deg B, \deg D)$

et
$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^2 \\ [\lambda : \mu] &\longmapsto \underbrace{\left[\mu^d A\left(\tfrac{\lambda}{\mu}\right) : \mu^d B\left(\tfrac{\lambda}{\mu}\right) : \mu^d D\left(\tfrac{\lambda}{\mu}\right) \right]}_{\text{homogènes de degré } d} \end{aligned}$$

Comme A, B et D n'ont pas de facteurs communs ϕ est bien définie. Comme (a, b) est un paramétrage de C_F, en dehors d'un nombre fini de $[\lambda : \mu]$ $\phi([\lambda:\mu]) \in C_F$.
Comme C_F est fermée et ϕ est continue, $\operatorname{Im} \phi \subset C_F$.
Comme (a, b) est un paramétrage de C_F, ϕ est génériquement injective et génériquement surjective sur C_F.

Réciproquement, à partir de
$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow C_F \quad \text{polynomiale} \\ [\lambda : \mu] &\longrightarrow [X(\lambda,\mu)\ Y(\lambda,\mu)] \end{aligned}$$
il suffit de choisir

$$a(t) = \frac{X(t,1)}{Z(t,1)} \qquad b(t) = \frac{Y(t,1)}{Z(t,1)}$$

Pour généraliser ces exemples, on est amené à étudier la notion de <u>points singuliers</u> et à développer des outils pour déterminer l'intersection d'une droite avec une courbe et plus généralement <u>l'intersection de deux courbes</u>.
On va aussi généraliser la notion de <u>pinceau de droites</u>.

III) Points singuliers

On fait une étude locale des courbes ; on peut donc travailler en coordonnées affines.

Un point de départ est le théorème des fonctions implicites

<u>Théorème</u> : Soit $f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ un polynôme en deux (~~ou plus~~ variables. Si $f(0,0)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$ il existe $\varepsilon > 0$ $\delta > 0$ tels que

. $\forall\ x \in \mathbb{C}$ $|x| < \varepsilon$, l'équation $f(x,y)=0$ a une unique solution de norme inférieure à δ soit $y(x)$

. la fonction $x \longmapsto y(x)$ est ~~holomorphe~~ <u>analytique</u> sur D_ε.

Démonstration : On choisit δ tel que $\forall\ y$ $0 < |y| \leq \delta$
(Narasimhan) $f(0,y) \neq 0$, puis ε tel que $\forall\ (x,y) \in \mathbb{C}^2$ $|x| \leq \varepsilon$ $|y| = \delta$ $f(x,y) \neq 0$.

Alors $$\frac{1}{2i\pi} \int_{|y|=\delta} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dy}{f(x,y)} = n(x)$$ est le nombre le zéros de $f(x,\cdot)$ dans le disque $|y| < \delta$.

Comme $f(0,y)$ ne s'annule qu'une seule fois dans $|y|<\delta$ et que $n(x)$ est une fonction continue, $\forall x \quad |x| < \varepsilon$

$f(x,y)=0$ a une unique solution dans $|y|<\delta$ soit $y(x)$.

Par ailleurs $$y(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|y|=\delta} y \, \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} \, dy$$

est holomorphe pour $|x| \leq \varepsilon$.

Dans ce cas $\{ (x,y) \in \mathbb{C}^2 \ / \ f(x,y) = 0 \}$

est au voisinage de $(0,0)$ le graphe de la fonction holomorphe $x \mapsto y(x)$.

<u>Exemple :</u> $f(x,y) = x^2 - y^3 - 1$ et $M_0(1,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0 \qquad \text{mais} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \neq 0.$$

Au voisinage de M_0, on peut choisir y comme paramètre

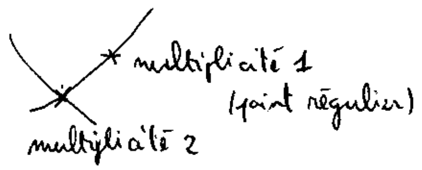
et $x(y) = 1 + \frac{1}{2} y^3 - \frac{1}{8} y^6 \ldots\ldots$

$$\left(1 + \frac{1}{2} y^3 - \frac{1}{8} (y)^6\right)^2 - y^3 - 1 = O(y^9)$$

Définitions : Soit $f \in \mathbb{C}[x,y]$ et $(x_0, y_0) \in C_f$

On dit que (x_0, y_0) est un point singulier de C_f si $df(x_0, y_0) = 0$.

Si toutes les dérivées partielles de f au point (x_0, y_0) jusqu'à l'ordre $(m-1)$ sont nulles, on dit que M_0 est un point de multiplicité (au moins) m.



$y^2 - x^3 = 0$

IV) Intersection de courbes (étude grossière)

Théorème : Deux courbes algébriques planes C_F et C_G de degré respectif $(\deg F)$ et $(\deg G)$ ont (i) au moins un point commun et (ii) au plus $(\deg F)(\deg G)$ points commun.

Démonstration : Pour (ii) (par l'absurde), on choisit $(\deg F)(\deg G)+1$ points communs M_i et un point P hors de C_F, de C_G et des droites qui joignent deux des M_i.

On choisit un système de coordonnées homogènes de sorte que $P = [0:0:1]$.

Alors $F(X,Y,Z) = A_0(X,Y)\,Z^d + A_1(X,Y)\,Z^{d-1} + \cdots + A_d(X,Y)$

$G(X,Y,Z) = B_0(X,Y)\,Z^e + \cdots \qquad + B_e(X,Y)$

Comme les A_i $i>0$ sont homogènes de degré >0 en (X,Y) ils sont nuls en $[0:0:1]$. Comme $P \notin C_F$ et $P \notin C_G$ A_0 et B_0 sont deux constantes non nulles.

Le résultant $R(X,Y)$ de F et G par rapport à Z est soit nul, soit homogène de degré $(\deg F)(\deg G) \geq 1$. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, $R(X,Y)$ a au moins un zéro $[X_0:Y_0]$ dans $\mathbb{P}^1_{X:Y}(\mathbb{C})$. Donc $F(X_0:Y_0:Z)$ et $G(X_0:Y_0:Z)$ ont au moins une racine commune. Par conséquent $C_F \cap C_G$ n'est pas vide.

Comme aucun des couples M_i, M_j n'est aligné avec P

$$\det \begin{pmatrix} X_i & X_j & 0 \\ Y_i & Y_j & 0 \\ Z_i & Z_j & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} X_i & X_j \\ Y_i & Y_j \end{pmatrix} \neq 0 .$$

Par conséquent $[X_i : Y_i]$ donnent $(de+1)$ racines distinctes de R, et $R=0$. Donc F et G ont un facteur commun dans $\mathbb{C}[X,Y][Z] = \mathbb{C}[X,Y,Z]$ et E_F et C_G ont une composante commune.

<u>Remarque</u> : L'existence d'un point d'intersection est un énoncé projectif, car il faut pouvoir choisir $[X_0 : Y_0]$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

On veut maintenant tenir compte des multiplicités.

Théorème : Si $f \in \mathbb{C}[x,y]$ est de multiplicité r à l'origine et $g \in \mathbb{C}[x,y]$ est de multiplicité s à l'origine alors $\mathrm{res}_y(f,g)$ est de multiplicité au moins rs en O.

Démonstration : Exercice analogue à l'homogénéité de $\mathrm{Res}_Z(F,G)$ si F et G sont homogènes.

On peut combiner les deux théorèmes précédents en (Théorème de Bezout faible)

Théorème : Si deux courbes C_F et C_G sans composante communes ont des multiplicités respectives r_i et s_i en (certains de) leurs points d'intersection alors

$$\sum r_i s_i \leq (\deg F)(\deg G)$$

V) Systèmes linéaires de courbes

On identifie une courbe C_F à son équation $F \bmod \mathbb{C}^*$.
Par exemple, les courbes d'équation X^2Y et XY^2 sont considérées comme différentes. Ainsi, l'espace des courbes algébriques planes de degré d devient un espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{C}[X,Y,Z]_d)$.

Lemme : 1) $\dim P(\mathbb{C}[X,Y,Z]_d) = \dfrac{d(d+3)}{2}$

2) Avoir M_0 comme point singulier de multiplicité au moins r impose $\dfrac{r(r+1)}{2}$ conditions linéaires.

L'espace $\mathbb{C}[X,Y,Z]_d$ admet une base composée de monômes

Dem : 1) Pour construire un monôme $X^a Y^b Z^c$ avec $a+b+c=d$

on dispose $(d+2)$ points $\times \; \times \; \times \; \times \; \times \; \times \; \times \; \times^{(d+2)}$

on en choisit 2 $\underset{i}{\uparrow} \qquad \underset{j}{\uparrow}$

et on obtient $X^{i-1} \; Y^{j-i} \; Z^{d-j+1}$

Il y a donc $\dbinom{d+2}{2}$ tels monômes.

Donc, $\dim P_d = \dfrac{(d+2)(d+1)}{2} - 1 = \dfrac{d(d+3)}{2}$

2) On raisonne en coordonnées affines. Il y a

$$\underset{f=0}{1} + \underset{\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}}{2} + \dots + \underset{\frac{\partial^{r-1} f}{\partial x^i \partial y^{r-1-i}}}{r} = \frac{r(r+1)}{2} \text{ conditions.}$$

Remarque : On prendra garde que les conditions imposées par plusieurs points ne ~~imposent~~ sont pas nécessairement indépendantes.

Exemple : Une cubique qui passe par huit des neufs points d'intersection de deux cubiques passe automatiquement par le $9^{\text{ième}}$. Le neuvième n'impose pas de nouvelles conditions.

VI) Retour sur les singularités

On va utiliser le théorème de Bezout faible pour limiter la complexité des singularités d'une courbe de degré d.

<u>Théorème</u> : Si une courbe irreductible de degré d a des points P_i de multiplicité r_i alors
$\sum r_i(r_i-1) \leq (d-1)(d-2)$

<u>Dem</u> : Comme la courbe C est supposée irreductible, C n'a pas de composante multiple et on peut donc choisir des coordonnées homogènes $X:Y:Z$ de sorte que C_F et $\cancel{\frac{\partial C_F}{\partial}}$ $C_{\frac{\partial F}{\partial X}}$ n'ait pas de composantes communes.
Alors, comme les P_i sont de multiplicité au moins $r_i - 1$ pour $C_{\frac{\partial F}{\partial X}}$

$$\sum r_i(r_i-1) \leq d(d-1).$$

On peut en fait maintenant imposer plus de conditions à la courbe auxiliaire.

$$\sum \frac{r_i(r_i-1)}{2} \leq \frac{(d-1)(d-1+3)}{2}$$

Il y a donc une courbe C' de degré $d-1$ qui passe par P_i avec multiplicité $r_i - 1$ et par $\frac{(d-1)(d+2)}{2} - \sum \frac{r_i(r_i-1)}{2}$ autres points de C_F fixés.

Par le théorème de Bezout appliqué à C_F et C' on trouve

$$\sum r_i(r_i-1) + \frac{(d-1)(d+2)}{2} - \sum \frac{r_i(r_i-1)}{2} \leq d(d-1)$$

soit $$\sum r_i(r_i-1) \leq (d-1)(d-2).$$

VII) Condition suffisante de rationalité

On veut maintenant généraliser le résultat de rationalité des cubiques à point double.

Exemple : Une courbe irreductible de degré d avec un point ~~double~~ singulier de multiplicité $d-1$ est rationnelle.

Théorème : Soi une courbe irreductible C de degré d a des points P_i de multiplicité r_i distincts et si $\sum r_i(r_i-1) = (d-1)(d-2)$ alors C est rationnelle.

Démonstration : On cherche un système linéaire de courbes de dimension 1 (on dit alors un pinceau de courbes) dont chaque membre (sauf peut-être un nombre fini) rencontre C_F en N points fixes et un point mobile qui parcourt C_F (sauf peut-être un nombre fini de points) une seule fois.

On considère le système linéaire des courbes de degré $d-1$ qui passent par chaque P_i avec multiplicité $r_i - 1$ et par

$$\frac{(d-1)(d+2)}{2} - \sum \frac{r_i(r_i-1)}{2} - 1 = \frac{(d-1)(d+2)}{2} - \frac{(d-1)(d-2)}{2} - 1$$
$$= 2d-3$$

points lisses M_j de C_F fixés. Il y en a un espace de dimension au moins 1.

Si la dimension est au moins 2, on peut encore imposer deux autres points. Si C' est une telle courbe

$$\sum r_i(r_i-1) + 2d-3+2 = (d-1)(d-2) + 2d-1$$
$$> (d-1)\,d$$

ce qui contredit le théorème de Bezout.

On a donc un pinceau de courbes.

À une exception près, ces courbes ont une équation de la forme

$$g_0 + \lambda g_1 = 0$$

On choisit des coordonnées affines telles que

$$f = a\,y^d + a_1(x)\,y^{d-1} + \cdots \qquad a \neq 0$$
$$g_0 = b\,y^{d-1} + b_1(x)\,y^{d-2} + \cdots \qquad b \neq 0$$
$$g_1 = c\,y^{d-1} + \cdots \qquad c \neq 0.$$

et telles que le résultant de f et g_0 par rapport à y soit exactement de degré $d(d-1)$. (Il ~~faut~~ suffit d'assurer que C_F et C_{G_0} ne se rencontrent pas à l'infini) c'est à dire que leur partie homogène en (x,y) de degré d (resp $d-1$) n'ont pas de zéros communs.

Alors $\operatorname{Res}_y(f\,;\,g_0+\lambda g_1) =: R(x,\lambda)$

est un polynôme en x et λ

$$r_{d(d-1)}(\lambda)\,x^{d(d-1)} + \dots + r_1(\lambda)x + r_0$$

$r_{d(d-1)}(0) \neq 0$.

On ne considère désormais que les valeurs de λ telles que $r_{d(d-1)}(\lambda)\neq 0$

Les abscisses x_i des P_i $(r_i(r_i-1))$ et les abscisses x^j des $(2d-3)$ points M_j fournissent $(d-1)(d-2) + 2d-3 = d(d-1)-1$ solutions de $R(x,\lambda)$ - La dernière

$$x(\lambda) = -\frac{r_{N-1}(\lambda)}{r_N(\lambda)} - \sum r_i(r_i-1)\,x_i - \sum x^j$$

est l'abscisse du dernier point d'intersection.
C'est une fonction rationnelle.

On fait de même pour l'ordonnée $y(\lambda)$.

- Presque tous les points sont atteints par $(x(\lambda), y(\lambda))$ car le système est de dimension 1.

- Si un point est atteint par deux courbes C_{G_λ} il est sur toutes les C_{G_λ} et on peut donc imposer un autre point, ce qui contredit Bezout.
  en fait, $\lambda = -\dfrac{g_0(x,y)}{g_1(x,y)}$
  soit $[1:\lambda] = [\,g_1(x,y) : -g_0(x,y)\,]$.

Impossibilité de paramétrer rationnellement une cubique lisse (Clemens)

On peut montrer que toute cubique lisse a un point d'inflexion (un point où la multiplicité d'intersection avec la droite tangente est au moins 3).
En mettant ce point à l'infini, on obtient une équation affine pour C de la forme $y^2 = P_3(x)$

Si P_3 a une racine double, C est singulière.
Sinon, par homographie sur l'axe des x, on peut supposer que les racines de P_3 sont 0, 1 et λ

$$C_\lambda \qquad y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$$

Si $a(t)$, $b(t)$ est un paramétrage rationnel de C_λ
en prenant des représentants $a(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$ et $b(t) = \frac{r(t)}{s(t)}$

$p \wedge q \qquad r \wedge s = 1$

on trouve $r^2 q^3 = p(p-q)(p-\lambda q)\, s^2$

$s^2 \mid q^3 \qquad q \wedge (p-q) = 1 \qquad q \wedge p(p-q)(p-\lambda q) = 1$

donc $q^3 \mid s^2$. Donc $r^2 = p(p-q)(p-\lambda q)$

Par unicité de la décomposition, $p, q, p-q$, $p-\lambda q$ sont des carrés. $p = u^2 \qquad q = v^2 \qquad (c\, q^3 = c\, v^2 = (c'v)^2)$

$$p-q = (u+v)(u-v)$$
$$p-\lambda q = (u+\mu v)(u-\mu v) \qquad \mu^2 = \lambda$$

Donc $u+v$, $u-v$, $u+\mu v$, $u-\mu v$ sont des carrés

et Maxdeg $<$ Max deg $p, q, p-q, p-\lambda q$

En continuant, on aboutit à des constantes.

En remontant la construction, on obtient que p et q sont des constantes. Alors $r^2 = s^2$ et b est constant.

Chapitre II — Géométrie birationnelle des courbes

On cherche à affiner les conditions nécessaires de rationalité et par exemple à trouver toutes les courbes algébriques planes lisses rationnelles.

On cherche des objets qui caractérisent les courbes à nombre fini de points près.

I) Le corps des fonctions rationnelles

a) Définitions

Pour une courbe affine irréductible V, C_f on définit le corps des fonctions rationnelles sur C_f comme le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{C}[C_f] = \mathbb{C}[x,y]/_{(f)}$ des fonctions ~~régulières~~ polynômiales sur C_f.

Pour une courbe projective irreductible C_F on définit le corps des fonctions rationnelles sur C_F par

$$\mathbb{C}(C_F) := \left\{ \frac{A}{B} \;/\; A, B \in \mathbb{C}[X,Y,Z] \text{ homogènes de même degré et } F \nmid B \right\} /_\sim$$

$$\frac{A}{B} \sim \frac{A'}{B'} \quad \text{si} \quad F \mid AB' - A'B$$

<u>Lemme</u> : Si $C_F \not\subset C_Z$ alors $\Sigma_F = \mathbb{C}(C_F)$ ~~est~~ naturellement isomorphe à $\Sigma_f = \mathbb{C}(C_f)$ où $f(x,y) = F(x,y,1)$.

~~On notera Σ_F ce~~

b/ Structure de Σ_f.

* Si la fonction x est constante sur $C_f \subset \mathbb{C}^2$ alors $f \mid (x-c)$ donc $f = ax+b$.
  Alors $\Sigma_f = \mathbb{C}(y)$ et y est transcendante sur $\mathbb{C}$, car non constante.

* Sinon, x est transcendante sur $\mathbb{C}$ et y est algébrique sur $\mathbb{C}(x)$ car $f(x,y)=0$.
  ~~Le plus~~ Or (x,y) engendre Σ_f comme algèbre.
  Donc $\Sigma_f = \mathbb{C}(x,y) = \mathbb{C}(x)[X] / \mu_y(X)$ polynôme minimal de y dans $\mathbb{C}(x)$.
  extension algébrique de $\mathbb{C}(x)$.

<u>Lemme</u> : Deux éléments non constants de Σ_f sont toujours algébriquement dépendants (c à d il existe $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ tel que $P(a,b)=0$

<u>Dem</u> : Comme Σ_f est algébrique sur $\mathbb{C}(x)$, il existe $A \in \mathbb{C}(x)[X]$ tel que $A(a)=0$. De même, il existe $B \in \mathbb{C}(x)[X]$ tel que $B(b)=0$.
En multipliant par des ~~puissance~~ polynômes en x, on peut supposer que $A \in \mathbb{C}[x][X]$ et $B \in \mathbb{C}[x][X]$ mais x n'est pas un facteur ni de A, ni de B.
$A(X,Y)$ et $B(X,Z)$ n'ont pas de facteurs communs dans $\mathbb{C}[X,Y,Z]$.
Comme a est non constant, $\deg_X A(X,Y) \geqslant 1$.

Donc $R(Y,Z) = \mathrm{Res}_X \big(A(X, Y),\ B(X, Z) \big) \in \mathbb{C}[Y, Z]$ est non nul.

Mais $A(X, a)$ et $B(X, b)$ ont $(X - x)$ comme facteur commun. ~~dans~~ $\mathbb{C}(x)[X]$.

Donc $R(a, b) = 0$

On dit alors que Σ_f est de degré de transcendance 1 (admet un élément transcendant, mais pas de famille à deux éléments algébriquement indépendants).

<u>Caractérisation des corps de fonctions</u>

<u>Proposition:</u> Un corps $\Sigma \supset \mathbb{C}$ est le corps des fonctions rationnelles sur une courbe algébrique plane si et seulement si

(i) Σ est engendré par un nombre fini d'éléments en tant qu'algèbre sur $\mathbb{C}$

(ii) Σ est de degré de transcendance 1.

<u>Dem</u> : Si (i) et (ii) sont satisfaites, soit ξ un élément transcendant de Σ. Les éléments d'une famille génératrice $x_1, \dots x_n$ sont algébriques sur $\mathbb{C}(\xi)$ par deg trans $= 1$. Par le théorème de l'élément primitif, il existe y tel que $\Sigma = \mathbb{C}(\xi)(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{C}(\xi)(y)$

Comme y est algébrique sur $\mathbb{C}(\xi)$, Σ est le corps des fonctions rationnelles sur la courbe C_f où $f(\xi, y) = 0$ est une équation irreductible satisfaite par y sur $\mathbb{C}[\xi]$.

Proposition : Si une courbe irréductible admet un paramétrage génériquement surjectif par deux fractions rationnelles de $\mathbb{C}(t)$ alors son corps de fonctions rationnelles est isomorphe à $\mathbb{C}(t)$.

Dem : Soit $(x(t), y(t)) \in (\mathbb{C}(t))^2$ un paramétrage de C_f

Comme l'une des deux composantes est non constante donc transcendante sur $\mathbb{C}$ et l'autre vérifie $f(x,y) = 0$ avec $f \in \mathbb{C}(x)[y] \simeq \mathbb{C}(y)[x]$ irréductible,

$\mathbb{C}(x,y)$ est isomorphe à Σ_f.

Maintenant $\mathbb{C}(x,y) \subset \mathbb{C}(t)$ – A l'aide du théorème de Lüroth, on déduit que $\mathbb{C}(x,y)$ est le corps des fractions en un élément $g(t)$ non constant de $\mathbb{C}(t)$ et qu'il est donc isomorphe à $\mathbb{C}(t)$.

Théorème (Lüroth) Voir Van der Waerden Modern algebra Tome 2 p 63

Si Σ est un corps intermédiaire entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}(t)$ (i.e. $\mathbb{C} \subsetneq \Sigma \subset \mathbb{C}(t)$) alors Σ est égal à $\mathbb{C}(g)$ pour un $g \in \mathbb{C}(t)$ non constant, et $\Sigma \simeq \mathbb{C}(t)$.

En particulier, si une courbe C_f est le but d'une application rationnelle dominante de source $\mathbb{P}^1$, alors C_f est rationnelle.

c/ Homomorphismes de corps et applications rationnelles (Voir Perrin)

Toute application $\varphi : \underset{\cap}{C_f} \longrightarrow \underset{\cap}{C_g}$ ($C_f \subset \mathbb{C}^2$, $C_g \subset \mathbb{C}^2$) donnée par des polynômes induit un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\varphi^* : \mathbb{C}[C_g] \longrightarrow \mathbb{C}[C_f]$ entre anneaux de fonctions (polynômiales par $(\varphi^* P)(M) = P(\varphi(M))$

Proposition : Soit $\phi : \mathbb{C}[C_g] \longrightarrow \mathbb{C}[C_f]$ un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres - Alors il existe une unique application $\varphi : C_f \longrightarrow C_g$ polynômiale telle que $\varphi^* = \phi$.

Dem : $\mathbb{C}[C_f] = \mathbb{C}[x,y]/_{(f)}$ $\qquad \mathbb{C}[C_g] = \mathbb{C}[x',y']/_{(g)}$

- L'unicité : soit $\varphi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ polynômiale telle que
$\varphi(C_f) \subset C_g$ et $\varphi^* = \phi$
$\varphi^* \overline{x'} = \overline{x'} \circ \varphi = \phi(\overline{x'})$
Donc $\forall M \in \mathbb{C}^2 \quad \varphi(M) = (\phi(\overline{x'})(M), \phi(\overline{y'})(M))$
- On montre ensuite, en utilisant le fait que ϕ est un morphisme, que cette formule convient.

Corollaire : φ est un isomorphisme de courbes ssi φ^* est un isomorphisme d'algèbres.

Remarques : (i) On peut localiser cette construction, c'est à dire considérer des anneaux localisés en un polynôme non nul, et travailler en dehors des zéros de ce polynôme.

(ii) L'injectivité de φ^* correspond seulement au fait que φ est dominant : son image est le complémentaire d'un nombre fini de points.

On peut noter que pour $P \in \mathbb{C}[C_g]$ $\quad (\varphi^* P)(M) = P(\varphi(M))$

et donc que $\varphi^* P = 0 \iff \mathrm{Im}\, \varphi \subset C_P \cap C_G$

~~Pour la réciproque, on utilise que l'adhérence de Zariski de $\mathrm{Im}\,\varphi$ est un sous ensemble algébrique de C_G~~

Si $\mathrm{Im}\,\varphi$ n'est pas dense au sens de Zariski, $\mathrm{Im}\,\varphi \subset C_P$ fermé de Zariski. et $\varphi^* P = 0$.

Soit maintenant $\varphi : C_f \dashrightarrow C_g$ donnée par des fractions rationnelles. φ induit $\varphi^* : \mathbb{C}[C_g] \longrightarrow \mathbb{C}(C_f)$

Si φ est dominante, φ^* est injective et on peut l'étendre au corps des fractions $\varphi^* : \mathbb{C}(C_g) \to \mathbb{C}(C_f)$ en un morphisme de corps

<u>Proposition</u> : Tout morphisme de corps $\phi : \mathbb{C}(C_g) \to \mathbb{C}(C_f)$ se réalise de façon unique par une application rationnelle dominante $\varphi : C_f \dashrightarrow C_g$.

L'hypothèse dominante assure de pouvoir définir la composition.

<u>Def</u> : Une application $\varphi : C_f \dashrightarrow C_g$ rationnelle dominante est dite birationnelle s'il existe une application rationnelle dominante $\psi : C_g \dashrightarrow C_f$ telle qu'au sens des applications rationnelles $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{C_g}$ et $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{C_f}$.

<u>Théorème</u> : Si $\varphi : C_f \dashrightarrow C_g$ est rationnelle dominante on a les équivalences

(i) φ est birationnelle

(ii) φ^* est un isomorphisme entre $\mathbb{C}(C_g)$ et $\mathbb{C}(C_f)$

(iii) φ est une application bijective birégulière entre le complémentaire d'un nb fini de points dans C_f et le complémentaire d'un nb fini de points dans C_g

L'équivalence avec (iii) se fait en notant que φ^*

se restreint en $\varphi^* : \mathbb{C}[C_g] \longrightarrow \mathbb{C}[C_f]_h$ localisation en h dénominateur commun.

et $(\varphi^{-1})^*$ en $\psi^* : \mathbb{C}[C_f] \longrightarrow \mathbb{C}[C_g]_j$

donc $\varphi^* : \mathbb{C}[C_g]_{j\,\psi^* h} \longrightarrow \mathbb{C}[C_f]_{h\,\varphi^* j}$ -

<u>Corollaire</u> : Une courbe C_f est rationnelle si et seulement si son corps de fonctions rationnelles est isomorphe au corps des fractions rationnelles en une variable $\mathbb{C}(X)$.

II) <u>Paramétrisations et places</u>

On cherche à affiner la notion de points sur la courbe C_f ~~affi~~ afin d'affiner la notion de multiplicité d'intersection et de rendre précis le théorème de Bezout.

Soit $f \in \mathbb{C}[x,y]$.

<u>Def</u> : ~~On~~ On dit que $p = (a(t), b(t)) \in \mathbb{C}[[t]]^2$ l'anneau des séries formelles est une <u>paramétrisation</u> de C_f si $(a(t), b(t)) \notin \mathbb{C}^2$ ne sont pas constante et $\forall t \in \mathbb{C}$ $(a(t), b(t)) \in C_f$.

La valeur $(a(0), b(0))$ est appelée <u>centre</u> de p

Deux paramétrisations p et p' sont dites <u>équivalentes</u> s'il existe $\tau(t) \in t\mathbb{C}[[t]]$ telle que $p' = (a(\tau(t)), b(\tau(t)))$.

On peut montrer que quitte à changer de système de coordonnées toute paramétrisation est équivalente à une paramétrisation de la forme $x(t) = t^n$ $y(t) = a_1 t^{n_1} + a_2 t^{n_2} + \dots$

$0 < n$ $0 < n_1 < n_2 \dots$

Si n et les n_i ont un diviseur commun $r > 1$ on peut utiliser $s = t^r$ comme paramètre. On dit alors que p est <u>redondante</u>.

Une <u>place</u> est une classe d'équivalence de paramétrisations non redondantes.

<u>Exemples</u> : 1) $f(x,y) = xy$ $\qquad \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \end{cases}$

2) $f(x,y) = y^2 - x^3$ $\qquad \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 \end{cases}$

L'<u>ordre</u> d'une place p est le minimum des valuations de $x(t)$ et $y(t)$.

Si $L\,(\,a(x - x(0)) + b(y - y(0))\,)$ est une droite qui passe par le centre de la place p, la <u>multiplicité d'intersection de C_f et de L en p</u> est la valuation de

$$L(x(t), y(t)) = \sum_{i=1}^{+\infty} (a\, x_i + b\, y_i)\, t^i$$

Elle vaut au moins (ordre p) et vaut (ordre p + 1) pour la droite de paramètre (a,b) où $a\, x_{\text{ord}\, p} + b\, y_{\text{ord}\, p} = 0$. appelée <u>tangente à C_f en la place p</u>.

Plus généralement, on peut substituer une place p dans l'équation d'une courbe C_g. La valuation de la série entière en t obtenue est par définition la ~~ordre~~ <u>multiplicité d'intersection</u> de C_g et p, notée $\text{ord}_p\, g$ ou $\text{mult}_p(C_g, C_f)$

La forme normalisée des paramétrisations

$$x(t) = t^n \qquad y(t) = a_1 t^{m_1} + a_2 t^{m_2} + \cdots$$

amène à considérer l'anneau $\mathbb{C}[[t^*]] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{C}[[t^{1/n}]]$

et son corps des fractions $\mathbb{C}((t^*))$, le corps des séries de Laurent fractionnaires.

Dans ce contexte, la théorie de Puiseux fournit une version algébrique forte du théorème des fonctions implicites.

<u>Théorème</u> : $\mathbb{C}((t^*))$ est algébriquement clos.
(admis)

En particulier $f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] \subset \mathbb{C}((x^*))[y]$ s'écrit

$$f(x,y) = a^* \prod_{i=1}^{\deg f} (y - y_i^*) \qquad a^*, y_i^* \in \mathbb{C}((x^*)), \quad a^* \neq 0$$

On a une correspondance entre

places centrées en $(0,0)$ $\longleftrightarrow$ solution y^* de $f(x,y^*)=0$ de valuation > 0 dans $\mathbb{C}((x^*))$

$t = x^{1/r}$ $\quad (t^r, y^*) \longleftarrow y^*$

$$t^r,\ y(t) = \sum a_i t^{m_i} \longmapsto y^* = \sum a_i x^{m_i/r}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \#$$

$$t^r,\ \sum a_i \varepsilon^{m_i} t^{m_i} \longmapsto y^* = \sum a_i \varepsilon^{m_i} x^{m_i/r}$$

$\varepsilon^r = 1$

Théorème : La somme des ordres sur C_g des places de C_f centrées en M est égale à la somme des ordres sur C_f des places de C_g centrées en M.

Dem : $f = a^* \prod_i (y - y_i^*)$ $\qquad g = b^* \prod_j (y - z_j^*)$

On peut choisir y_i^* et z_j^* dans un même $\mathbb{C}[[t^{1/m}]]$ centrée en $(0,0)$

Si p est une place de f associée à y_i^* et d'ordre ν

$g(p)$ obtenue par substitution est ~~de valuation en~~ $\cancel{t}$

égale à $g(t^\nu, \sum a_i t^{m_i}) = a\, t^N + \dots$ $\qquad N = \mathrm{ord}_p\, g = \mathrm{mult}_p\, C_f \cap C_g$

$0 < k \leq \nu - 1$ $\quad g(t^\nu, \sum a_i \varepsilon^{k m_i} t^{m_i}) = a\, \varepsilon^k t^N + \dots$

$$\prod_{k=0}^{\nu-1} g(t^\nu, \sum a_i \varepsilon^{k m_i} t^{m_i}) = a\, t^{\nu N} + \dots$$
$$= a\, x^N + \dots$$

Donc $N = \mathrm{Val}_x \prod_{\substack{p(y_k^*) = p(y_i^*) \\ j}} (y_k^* - z_j^*)$

Donc $\sum_{p \in \mathcal{P}(C_f)} \mathrm{ord}_p\, g = \mathrm{Val}_x \prod_{i,j} (y_k^* - z_j^*)$

$$= \sum_{p \in \mathcal{P}(C_g)} \mathrm{ord}_p\, f$$

Corollaire : La somme des ordres des places d'une courbe C_f centrées en un point M est égale à la multiplicité de C_f en M.

Dem : Soit L une droite générique (qui rencontre f avec multiplicité multiplicité C_f en M et qui n'est tangente à aucune place de C_f centrée en M).

$\mathrm{mult}_M\, C_f = \mathrm{ord}_L\, f = \sum \mathrm{ord}_{p_i} L = \sum \mathrm{ord}(p_i)$.

Théorème de Bezout

Soit C_F et C_G deux courbes sans composantes communes.

Alors
$$\sum_{p \text{ place de } C_F} \mathrm{ord}_p\, G = \sum_{p \text{ place de } C_G} \mathrm{ord}_p\, F = (\deg F)(\deg G).$$

Dem : Comme C_F et C_G n'ont qu'un nombre fini de points communs, on peut choisir une droite à l'infini qui ne passe pas par $C_F \cap C_G$. Alors $f = a^* \prod (y - y_i^*)$
$g = b^* \prod (y - z_j^*)$ $M(0,0)$

$$\sum_{\substack{p \text{ places de } C_F \\ p \text{ centrée en } M}} \mathrm{ord}_p\, G = \sum_{M \in \mathbb{C}^2} \mathrm{val}_x \prod_{i,j} (y_i^* - z_j^*) = \mathrm{val}_x \mathrm{Res}_y(f,g)$$

$$= \sum_{M \in \mathbb{C}^2}$$

Comme f et g n'ont pas de points communs à l'infini, leur résultant est de degré $(\deg f)(\deg g)$ en x.

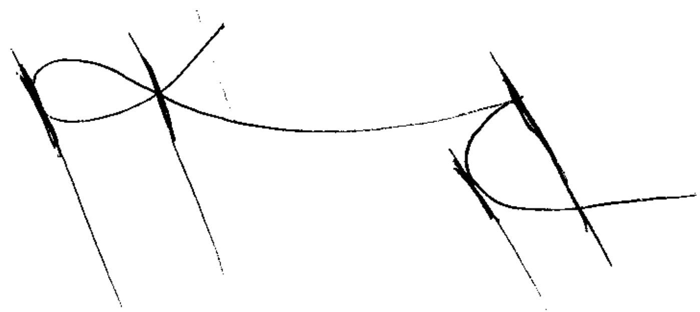
III) ~~Système~~ Degré canonique

On cherche à associer au corps Σ_F des grandeurs caractéristiques.
Un élément R de Σ_F, $R = \frac{A}{B}$ avec $(A, B) \in \mathbb{C}[X,Y,Z]^2$ homogènes de même degré avec F (supposé irréductible) qui ne divise pas B et $A \wedge B = 1$, donne lieu

- à une application
$$\varphi : \widetilde{C}_F \longrightarrow \mathbb{P}^1$$
$$M \longmapsto [A(M) : B(M)]$$

  partout bien définie aux places de C_F. (On simplifie par la plus ~~petite~~ puissance de t qui apparait dans les substitutions)

- à un pinceau de points sur C_F associé aux fibres de φ
$$\mu A - \lambda B = 0 \quad \text{mod } (F).$$



On cherchera à isoler les valeurs particulières du paramètre $[\lambda : \mu]$ et les multiplicités strictement plus grande que 1 d'intersection de C_F avec $d_{[\lambda:\mu]}$. On modifiera la somme de ces multiplicités de façon à obtenir une quantité qui ne dépend pas du choix particulier de R dans Σ_F.

Si S est un autre élément non constant de Σ_F

il existe une relation algébrique $p \in \mathbb{C}[x,y]$ telle que

$p(r,s) = 0$.

Si $M_t(x(t), y(t))$ est une paramétrisation de p

$$x'(t)\,\frac{\partial p}{\partial x}(M_t) + y'(t)\,\frac{\partial p}{\partial y}(M_t) = 0$$

Donc $\dfrac{x'(t)}{y'(t)}$ est une fonction rationnelle du centre M_t

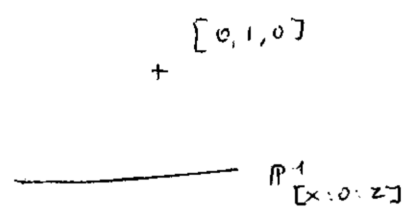
égale à $-\dfrac{\frac{\partial P}{\partial X}}{\frac{\partial P}{\partial X}}\left(\dfrac{A(X,Y,Z)}{B(X,Y,Z)}, \overbrace{\dfrac{C(X,Y,Z)}{D(X,Y,Z)}}^{S}\right)$ donc de degré nul

Par le théorème de Bezout, $\omega(t) = x'(t)\,dt$ et $y'(t)\,dt$ ont la même ~~la~~ somme des valuations ~~s'annulent en un même nombre de places, comptées avec multiplicités~~, appelé degré canonique de Σ_F .

Si $f : C_F \dashrightarrow C_G$ est birationnelle, en choisissant r ~~non nul~~ fini et de dérivée non nulle sur $C_G - U_G$ on vérifie qu'aux places où val $r'(f) \neq 0$, f est un changement de variables et donne lieu à deux places équivalentes. Donc $d_{\Sigma_F} = d_{\Sigma_G}$

Exemple : Calcul du degré canonique de $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2$.

$\mathbb{P}^1$ donné par $Y = 0$ dans $\mathbb{P}^2_{[X:Y:Z]}$



On choisit $R = \dfrac{X}{Z}$

Les places de $\mathbb{P}^1$ sont données par $\begin{cases} x(t) = x_0 + t \\ y(t) = 0 \end{cases}$

$$r(x(t), y(t)) = x(t) \qquad \text{et} \quad \frac{\partial x}{\partial t} \neq 0$$

et la place $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} \\ y(t) = 0 \end{cases}$ ~~autour de~~ de centre $[0:0:1]$

$$r(x(t), y(t)) = \frac{1}{t} \qquad \text{et } r' \text{ a valuation } -2 .$$

Donc $\deg \mathbb{C}(X) = -2$

Proposition : Une application birationnelle entre deux courbes planes induit une bijection entre leurs places.

Démonstration

L'application birationnelle est donnée sur chaque ouvert affine par

$$\varphi : \mathbb{C}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}^2$$
$$(x,y) \longmapsto x' = \phi(x,y) \quad , \quad y' = \psi(x,y)$$

où ϕ et ψ sont deux fonctions rationnelles sur $\mathbb{C}^2$ telles que

si $f(x,y) = 0$ alors $g(x',y') = 0$ où f est une équation de C_f
g ——— C_g

Si $[x(t), y(t), 1]$ est une paramétrisation de C_f alors

$[x'(t), y'(t), 1]$ où $x'(t) = \phi(x(t), y(t))$ $y'(t) = \psi(x(t), y(t))$

est une paramétrisation dans $\mathbb{C}((t))$ de C_g qui dans un ouvert affine convenable s'écrit à l'aide de séries formelles de $\mathbb{C}[[t]]$.
L'utilisation de la bijection réciproque de φ montre en effet que x' ou y' n'est pas constant.

La bijection réciproque montre aussi que la correspondance entre place ainsi obtenue est bijective.

Par ailleurs, si r est une fonction rationnelle sur C_g $r \circ \varphi$ est une fonction rationnelle sur C_f car φ est dominante et $(r \circ \varphi)(x(t), y(t)) = r(x'(t), y'(t))$ et donc la valuation de dr^* en la place p' $\left(\mathrm{Val}_t \frac{\partial}{\partial t} r(x'(t), y'(t)) \right)$ est égale à la valuation en la place p de $d(r\circ\varphi)$.

<u>Conséquence</u>: Le degré canonique ne dépend que du corps Σ ni de l'élément choisi dans Σ, ni de la courbe C_F avec $\Sigma_F = \Sigma$ dont on utilise les places.

Calcul du degré canonique d'une courbe algébrique plane irréductible à singularités ordinaires

Soit C_F une telle courbe. On suppose que le point $[0:1:0]$ n'est ni sur C_F ni sur les tangentes à C_F aux places centrées aux points singuliers. On suppose aussi que C_F et $C_{\frac{\partial F}{\partial y}}$ (qui n'ont pas de composantes communes) ne s'intersectent pas sur $(Z=0)$.

On considère la fonction rationnelle $x = \frac{X}{Z}$

1) Aux places centrées hors de $(Z=0)$.

Ces places peuvent s'écrire $[x(t) : y(t) : 1]$ avec $x(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ et $y(t) \in \mathbb{C}[[t]]$.

- ~~Aux~~ places centrées en un point lisse M_0

On a $F(x(t), y(t), 1) = 0$ et donc $x'(t) \frac{\partial F}{\partial x} + y'(t) \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t)) =$

Comme les places sont d'ordre 1 (singularités ordinaires) $x'(t)$ et $y'(t)$ ne s'annulent pas simultanément.
Comme M_0 est lisse $\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(M_0)$ ne s'annulent pas simultanément. Donc

$$\mathrm{val}_p\, dx = \mathrm{val}_t\, x'(t) = \mathrm{mult}_p\left(C_{\frac{\partial F}{\partial y}}, C_F\right)$$

dès que l'une de ces deux quantités est non nulle, (mais aussi dans le cas contraire).

- Aux places centrées sur un point singulier P_i de multiplicité r_i sur C_F.

Le point P_i est de multiplicité $r_i - 1$ sur $C_{\frac{\partial F}{\partial y}}$ et comme $(x - x_0)$ n'est pas une tangente

$$\sum_{p \text{ centrées en } P_i} \text{mult}_p \left(C_{\frac{\partial F}{\partial y}}, C_F \right) = r_i (r_i - 1)$$

En ce point, comme la fonction rationnelle x n'est constante sur aucune tangente, donc aucune place

$$\sum_{p \text{ centrées en } P_i} \text{val}_p (dx) = 0 .$$

Donc $$\sum_{\substack{p \text{ centrées} \\ \text{sur } Z \neq 0}} \text{val}_p (dx) = \sum_{\substack{p \text{ centrées} \\ \text{sur } Z \neq 0}} \text{mult}_p \left(C_{\frac{\partial F}{\partial y}}, C_F \right) - \sum_{P_i \text{ singulier}} r_i (r_i - 1)$$

$$= d(d-1) - \sum_{P_i \text{ singulier}} r_i (r_i - 1)$$

par le théorème de Bezout car $(Z = 0) \wedge C_{\frac{\partial F}{\partial y}} \wedge C_F = \emptyset$.

2) Aux places centrées sur $L (Z = 0)$

Comme $[0:1:0] \notin C_F$, en ces places $X \neq 0$.

Ces places s'écrivent $[1 : y(t) : z(t)]$ avec $y(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ $z(t) \in \mathbb{C}[[t]]$

$x(p) = \dfrac{X(p)}{Z(p)} = \dfrac{1}{z(t)}$ Donc $\text{val}_p \, dx = - \text{val}_t \, z(t) - 1$

$= - \text{mult}_p (L, C_F) - 1$

Par ailleurs, $y'(t) \dfrac{\partial F}{\partial y} + z' \dfrac{\partial F}{\partial z} = 0$. Comme $\dfrac{\partial F}{\partial y}(M_0) \neq 0$

et $y'(t)$, $z'(t)$ sont non simultanément nuls, $z'(0) \neq 0$.

donc $\text{val}_t \, z(t) = 1$ et $\text{val}_p \, dx = -2 \, \text{mult}_p (L, C_F)$.

Donc, $$\sum_{\substack{p \text{ centrées} \\ \text{sur } Z=0}} \operatorname{val}_p dx = -2 \sum_p \operatorname{mult}_p (L, C_F) = -2d$$

3/ En conclusion, $$d_\Sigma = d(d-1) - \sum_{P_i \text{ singulier}} r_i(r_i-1) - 2d$$

$$= (d-1)(d-2) - \sum_{P_i \text{ singulier}} r_i(r_i-1) - 2$$

$$= 2g - 2$$

où $g = \dfrac{(d-1)(d-2)}{2} - \displaystyle\sum_{P_i \text{ singulier}} \dfrac{r_i(r_i-1)}{2}$

pt singulier $x = y = 0$ $\quad X-Y$, $X+Y$ tangente

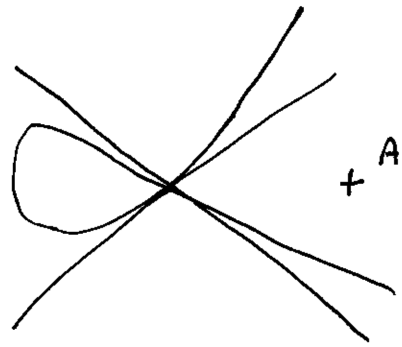
$y^2 = x^2(x+1)$ $\qquad z=0$ en $[0:1:0]$ $\quad z' = (x')^2(x'+z')$

$ZY^2 = X^2(X+Z)$ $\qquad$ lisse $\frac{\partial}{\partial z'} \neq 0$ en $[0:1:0]$

ne passe pas par $A\,[1:0:0]$. Les tangentes ne passe pas

$$C_F \longrightarrow \mathbb{P}^1 \qquad\qquad C_F \dashrightarrow \mathbb{C}$$
$$[X:Y:Z] \longrightarrow [Y:Z] \qquad\qquad [X:Y:Z] \longrightarrow y = \frac{Y}{Z}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial t}\, dt$$



• Aux places lisses finies

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad y^2 - x^2(x+1) = -3x^2 - 2x$$
$$= -x(3x+2)$$

$$(1+t)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}t^2$$

$*\quad x = -\frac{2}{3}$ $\qquad x = -\frac{2}{3} + at$

$y = \frac{2}{3\sqrt{3}} \qquad y = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

+1 +1 dy s'annule à l'ordre 1 en ~~cette~~ ces deux places.

$$x^2(x+1) = \left(-\frac{2}{3} + at\right)^2 \left(\frac{1}{3} + at\right)$$
$$= \frac{7}{9} - \frac{4}{9}at + \frac{7}{9}at$$
$$= \left(\frac{4}{9} - \frac{4}{3}at + a^2t^2\right)\left(\frac{1}{3} + at\right)$$
$$= \frac{4}{27} - \frac{4}{9}a^2t^2 + \frac{a^2}{3}t^2 + a^3t^3$$
$$y^2 = \frac{4}{27} - a^2t^2 + a^3t^3$$
$$y\frac{\partial y}{\partial t} = -2a^2t + \dots$$

$*\quad x = 0$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t\left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4}\right) \end{cases}$$

0 $\quad \begin{cases} x = t \\ y = -t\left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4}\right) \end{cases}$

dy ne s'annule pas

• A la place infinie $[0:1:0]$

$x' = t \qquad z' = t^3 + \dots$

−4 $\quad z' = \frac{1}{y} = \qquad y = \frac{1}{t^3 + \dots} = \frac{1}{t^3(1+\dots)} \quad dy = \frac{-3}{t^4}(\quad)$

EXERCICES DE GÉOMÉTRIE BIRATIONNELLE

1. Prolongement régulier d'une application rationnelle

1) En quels points du cercle $x^2 + y^2 = 1$, la fonction rationnelle $(1 - y)/x$ est-elle régulière (c'est à dire localement donnée comme fraction avec un dénominateur localement sans zéros) ?

2) L'application rationnelle $[X : Y : Z] \to X/Y$ se prolonge-t-elle sur la courbe d'équation $ZX^2 = Y^3$ en un morphisme régulier à valeurs dans $\mathbb{P}^1$ (c'est à dire localement donné par deux polynômes homogènes de même degré sans zéro commun) .

3) Et sur la courbe d'équation $ZY^2 = X^2(X - Z)$?

2. Morphisme birationnel non birégulier

Soit $f(x, y) = y^2 - x^3$ et l'application $\varphi : \mathbb{C} \to C_f$ donnée par $\varphi(t) = (t^2, t^3)$.

1) Déterminer le noyau et l'image du morphisme φ^* entre anneaux de fonctions polynômiales.

2) L'application φ est-elle birationnelle ?

3) L'anneau des fonctions polynômiales sur C_f est-il intégralement clos ?

4) L'application φ est-elle un isomorphisme de courbes ?

3. Rationalité ?

1) Soit $f \in \mathbb{C}[X]$. La courbe d'équation $y = f(x)$ est-elle irréductible, lisse, rationnelle ?

2) Montrer que le corps des fonctions rationnelles de la courbe d'équation $y^2 = (x-1)^2(x-2)$ est isomorphe au corps $\mathbb{C}(t)$.

3) Montrer que le corps des fonctions rationnelles de la courbe d'équation $y^2 = x(x-1)(x-2)$ n'est pas isomorphe au corps $\mathbb{C}(t)$.

4) Soit f_n et f_{n-1} deux polynômes homogènes de degré respectif n et $n - 1$. La courbe d'équation $(f_n + f_{n-1} = 0)$ supposée irréductible est-elle rationnelle ?

5) La courbe donnée en coordonnées polaires par $r = \sin 3\theta$ est-elle rationnelle ?

4. Non rationalité

On considère la courbe affine C_{f_n} d'équation $x^n + y^n = 1$. Soit a une application rationnelle de $\mathbb{C}$ dans C_{f_n} donnée par deux fractions rationnelles $(\varphi(t), \psi(t))$. On écrit $\varphi = p/r$ et $\psi = q/r$ avec p, q et r trois polynômes premiers entre eux.

1) Montrer que p^{n-1} divise $qr' - rq'$. $(n-1) \deg P \leq \deg Q + \deg R - 1$

2) Montrer que si $n \geqslant 3$ alors l'application a est constante. Conclure. $n \deg P \leq \deg Q$

$(n-2) \deg P \leq \deg R - 1 \leq \deg P - 1$

5. Calcul de degré canonique

A l'aide de la fonction rationnelle $y = Y/Z$ déterminer le degré canonique de la courbe d'équation $ZY^2 = X^2(X + Z)$.

$qr' - rq' = 0$ $\qquad \frac{q}{r} = \frac{q'}{r'} = \frac{q''}{r''}$

$qr'' - rq'' = 0$

$q'r'' - r'q'' + qr''' - rq''' = 0$