Deuxième partie — <u>Surfaces de Riemann</u>

Chap I — Définitions

Def : • Sur un espace topologique X, une carte holomorphe (de dimension complexe 1) est un homéomorphisme d'un ouvert U de X dans un ouvert V de $\mathbb{C}$.

• Deux cartes sur un ouvert U sont dites compatibles si

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dr, "\varphi_2"] & \\
\mathbb{C} \supset V \arrow[rr, "\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}"'] & & W \subset \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

les deux homéomorphismes $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ et $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ sont des biholomorphismes d'ouverts de $\mathbb{C}$

• Sur X, deux cartes sont compatibles si leur domaine U_1 et U_2 sont ~~vides~~ disjoints ou bien si φ_1 et φ_2 sont compatibles sur $U_1 \cap U_2$.

• Un <u>atlas</u> analytique complexe de dim 1 sur X est la donnée de cartes deux à deux compatibles dont les domaines forment un recouvrement de X.

• Deux atlas sont dits compatibles si leur réunion est un atlas.

• X muni d'une classe d'équivalence d'atlas analytique complexe de dim complexe 1 est appelé <u>surface de Riemann</u>.

Exemples : • Un ouvert de $\mathbb{C}$ avec la carte identité

• Le plan projectif complexe : On a ~~deux cartes~~ choisi un repère projectif avec des coordonnées homogènes $[X : Y]$

On a sur l'ouvert $X \neq 0$ la carte
$$\begin{aligned} \{X \neq 0\} &\xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{C} \\ [X:Y] &\longrightarrow \frac{X}{Y} \end{aligned}$$

et sur l'ouvert $Y \neq 0$ la carte
$$\begin{aligned} \{Y \neq 0\} &\xrightarrow{\varphi_2} \mathbb{C} \\ [X:Y] &\longrightarrow \frac{Y}{X} \end{aligned}$$

Le changement de carte sur $\{X \neq 0\} \cap \{Y \neq 0\}$

$$\begin{tikzcd} & \{X \neq 0\} \cap \{Y \neq 0\} \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dr, "\varphi_2"] & \\ \mathbb{C}^* & & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

$$\frac{X}{Y} \longmapsto \frac{Y}{X}$$

$$z \longmapsto \frac{1}{z} \quad \text{est holomorphe}$$

• Les tores complexes de dimension 1

Si Λ est un réseau de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$

(c'est à dire un sous groupe de $\mathbb{R}^2$ qui possède une $\mathbb{Z}$ base qui est une $\mathbb{R}$ base de $\mathbb{R}^2$, ou encore un sous groupe discret de $\mathbb{R}^2$ de rang 2)

$$\Lambda = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$$

Alors l'espace quotient est muni d'une structure de surface de Riemann unique telle que $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ soit holomorphe.

Si X est une surface de R, une ~~applicatio~~ fonction continue $f : X \to \mathbb{C}$ est dite hol méro
si pour chaque carte $\varphi : U \to V \subset \mathbb{C}$ $f \circ \varphi^{-1} : V \to \mathbb{C}$ est holoph.

Définition : Si X et Y sont deux surfaces de Riemann,

une application continue $f : X \to Y$ est dite holomorphe, méro

si pour chaque carte φ de Y, $\varphi \circ f : f^{-1}(\mathrm{dom}\,\varphi) \to \mathbb{C}$ est holomorphe.

Ex : $\dfrac{P(X,Y)}{Q(X,Y)}$ $\deg P = \deg Q$ P, Q homogène est une fonction méromorphe sur $\mathbb{P}^1$
sans facteur commun $[P : Q]$ définit ~~un prolonge~~ une application $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ holomorphe
Le nb de préimage d'un point compté avec mult $= \deg P$.

Proposition : Soit Y une surface de Riemann et X une variété différentiable connexe de dimension réelle 2 et $p : X \to Y$ un homéomorphisme local.
Alors ~~X~~, ~~peut~~ il existe une unique structure de surface de Riemann sur X telle que p soit holomorphe.

Dem : Soit U un ouvert de X tel que $p_{|U}$ soit un homéomorphisme sur son image supposée de plus incluse dans un ouvert de carte U'. On choisit alors l'homéomorphisme

$$U \xrightarrow{p} U' \xrightarrow{\varphi} V \subset \mathbb{C}$$

comme carte sur U. Ceci définit un atlas holomorphe sur X.

L'unicité vient du fait que si $U \subset X$ et $p_{|U}$ homéo sur $U' \subset Y$ et si p est holomorphe alors $p^{-1}_{|U'}$ est holomorphe.

(Il faudrait montrer que deux structures telles que p est holomorphe sont toujours compatibles).

Soit $\mathcal{U}'$ un autre atlas tel que $p : (X, \mathcal{U}') \to Y$ soit holomorphe. Alors $\mathrm{id} : (X, \mathcal{U}') \to (X, \mathcal{U})$ est un isomorphe local comme composé d'isomorphisme locaux.

$$\begin{tikzcd} (X,\mathcal{U}') \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr] & & (X,\mathcal{U}) \arrow[dl] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Par suite id est un isomorphisme et les deux ~~cartes~~ atlas sont compatibles.

Autre exemple : La partie régulière d'une courbe algébrique plane affine

$$(C_f)_{reg} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{C}^2 \ / \ f(x,y)=0 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) \neq (0,0) \right\}$$

C'est une sous variété complexe de $\mathbb{C}^2$, donc une surface de Riemann, en utilisant le théorème des fonctions implicites.

Chap II

Eléments de topologie

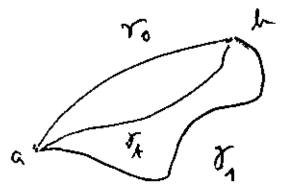
Godbillon
Topologie algébrique

I) Groupe fondamental, revêtement universel

Soit S une variété différentiable (de dimension 2) orientable avec un atlas dénombrables par des boules de $\mathbb{R}^2$ (euclidien).

Un chemin dans S est une application continue $\gamma : [0,1] \to S$.
Un lacet est un chemin fermé. Deux chemins γ_0 et γ_1 de même extrémité a et b sont dits homotopes, s'il existe une application $h : [0,1]_t \times [0,1]_x \to S$ continue telle que $\gamma(0,\cdot) = \gamma_0$ et $\gamma(1,\cdot) = \gamma_1$. $\gamma(\cdot,0) = a$, $\gamma(\cdot,1) = b$

(Autrement dit, γ_0 et γ_1 sont homotopes, si $\gamma_1 - \gamma_0$ bordent un disque.



L'ensemble des lacets basés en a ~~à homotopie p~~ quotienté par la relation d'homotopie est un groupe (pour la composition des lacets) appelé groupe fondamental de S.

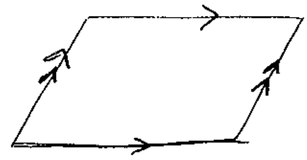
Proposition :

L'ensemble des chemins de a vers x, $(x \in S)$ à homotopie près peut être muni d'une structure de variété différentiable (de dimension 2) $\tilde{S}$ telle que l'application $p : \tilde{S} \to S$, $\gamma \mapsto \gamma(1)$ soit un homéomorphisme local. En particulier, si S est une surface de Riemann, $\tilde{S}$ peut être muni d'une structure de surface de Riemann. $\tilde{S}$ est appelé revêtement universel.

Le groupe fondamental $\pi_1(S,a)$ agit sur $\tilde{S}_a$ librement et p s'identifie à l'application de passage au quotient.

La surface $\tilde{S}$ est simplement connexe (tout lacet est homotope au lacet constant, borde un disque).

<u>Exemple</u> : $T = \mathbb{C}/\Gamma$.



Ici $\tilde{T} = \mathbb{C}$ $\qquad \pi_1(T) \simeq \Gamma \qquad$ $p :$
$$\begin{tikzcd} \tilde{T} \arrow[r] \arrow[d, equal] & T \arrow[d, equal] \\ \mathbb{C} \arrow[r] & \mathbb{C}/\Gamma \end{tikzcd}$$

Si S est connexe, les revêtements (homéomorphismes locaux par variétés connexes,) localement triviaux sur la base à homéomorphisme sur S près sont en bijection avec les ~~quotients~~ sous groupes de $\pi_1(S,a)$

$$\begin{tikzcd} \pi_1(S) \arrow[r] & \tilde{S} \arrow[d] \\ \Gamma \arrow[r, dashed] & \tilde{S}/\Gamma \arrow[d] \\ & S \end{tikzcd}$$

$\Gamma \subset \pi_1(S,a)$

$\pi_1(\tilde{S}/\Gamma) = \pi_1(S,a)/\Gamma$

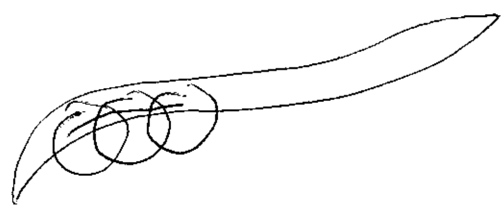
En particulier, $\tilde{S}$ n'a pas d'autre revêtement que lui-même.

II) Prolongement analytique

* Le prolongement analytique élémentaire d'un germe de fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ est obtenu par développement en série ~~ent~~ centré en un point du disque initial de convergence.

* Le prolongement analytique élémentaire d'un germe de fonction méromorphe sur une surface de Riemann X est obtenu par prolongement dans une des cartes.

* Si γ est un chemin dans X de a vers b, le prolongement analytique d'un germe en a le long de b (s'il existe) ne dépend pas
  - des cartes choisies
  - des points centres choisis sur γ
  - du représentant γ choisi dans sa classe d'homotopie. (grâce à la compacité de $[0,1]\times[0,1]$) (s'il existe sur toute l'homotopie)



* Si les prolongements d'un germe le long de tout chemin dans X existent, ils définissent une fonction méromorphe sur $\tilde{X}$.

* Réciproquement, toute fonction méromorphe sur $\tilde{X}$ invariante par le groupe fondamental donne une fonction méromorphe sur X.

III) Homologie

Une forme différentielle de degré 1 sur ~~une variété différentiable~~ un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ est la donnée d'une application $\mathcal{C}^\infty$ de U dans $(\mathbb{R}^2)^*$

Par exemple, si f est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur U

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad : \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x, y & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y \end{array}$$

est une forme différentielle de degré 1.

Une forme différentielle de degré 1 sur une ~~variété~~ variété différentielle S de dimension 2 est la donnée d'une forme différentielle sur tout ouvert de carte V avec des relations de compatibilité

$$\begin{tikzcd}
& & U \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dr, "\varphi_2"] & & \\
(\mathbb{R}^2)^* & V_1 \arrow[l, "\xi_1"'] \arrow[rr, "\varphi_{21}"] & & V_2 \arrow[r, "\xi_2"] & (\mathbb{R}^2)^*
\end{tikzcd}$$

$$\xi_1 = \cancel{\xi_2 \circ d\varphi_{21}} = \varphi_{21}^* \, \xi_2$$

$$\xi_1(\varphi_1(p)) \cdot X_1 = \xi_2(\varphi_2(p)) \cdot (d\varphi_{21} \cdot X_1)$$

Par exemple, si f est une fonction différentiable sur S la donnée de $\xi_i := d(f \circ \varphi_i^{-1})$ fournit une forme différentielle de degré 1

L'intégrale d'une forme différentielle de degré 1 sur $U\subset\mathbb{R}^2$ le long d'un chemin $\mathcal{C}^\infty$ γ est par définition

$\zeta = a\,dx + b\,dy$

$\gamma : I \to U \subset \mathbb{R}^2$
$t \mapsto (x(t), y(t)) = \gamma(t)$

$$\int_\gamma \zeta = \int_0^1 a(\gamma(t))\, x'(t) + b(\gamma(t))\, y'(t)\, dt$$

En utilisant des partitions de l'unité on peut définir

$\int_\gamma \zeta$ pour γ chemin dans S et ζ forme différentielle de deg 1 sur S.

~~Si dense~~

On dit qu'une forme différentielle ζ est <u>exacte sur $U\subset S$</u> s'il existe f fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur U telle que $\zeta = df$.

Alors, pour tout chemin inclus dans U, $\int_\gamma \zeta = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$

~~en particulier $\int_\gamma \zeta$ ne dépend alors que des extrémités de γ.~~

Par le théorème de Schwartz, si $\zeta = a\,dx + b\,dy$ est exacte

$$-\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x} = 0.$$

On dit qu'une forme différentielle ζ sur S est <u>fermée</u> en p si dans une carte (où de manière équivalente dans toute carte)

$$\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} = 0$$

Alors ζ sera exacte dans toute boule centrée en p dans une carte.

<u>Déf</u> : 1/ On définit un opérateur différentiel d'ordre 1 d sur $\mathcal{C}^1(X,\mathbb{R})$

$$d(a\,dx + b\,dy) = \left(-\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x}\right) dx\wedge dy$$

2/ $d(\varphi^*\zeta) = \varphi^* d\zeta$ Donc d ne dépend pas de la carte choisie.

Prop : Si γ et γ' sont deux lacets $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux homologues sur S et si ξ est fermée sur S alors $\int_\gamma \xi = \int_{\gamma'} \xi$

Dem : par la formule de Stokes $\int_{\gamma-\gamma'} \xi = \int_D d\xi = 0$

Def : On dit que $c_1\gamma_1 + \dots + c_k\gamma_k \equiv 0$ en homologie si pour toute forme fermée sur S

$$\sum c_i \int_{\gamma_i} \xi = 0$$

On dit que $c_1\xi_1 + \dots + c_k\xi_k \equiv 0$ en cohomologie (ξ_i formes fermées) si pour tout lacet γ $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux

$$\sum c_i \int_\gamma \xi_i = 0$$

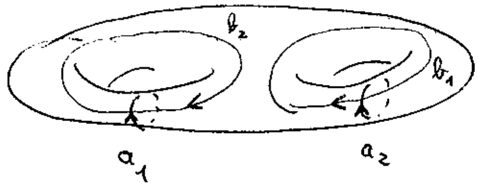
En particulier, si ξ est exacte sur S $\xi \equiv 0$ en cohomologie.

On note b^1 (premier nombre de Betti) le nombre maximal de formes différentielles cohomologiquement indépendantes.

Théorème : Si X est une surface ~~de Riemann~~ orientable compacte,
il existe une famille $\alpha_1, \beta_1 \dots \alpha_p, \beta_p$ de lacets orientés
tels que • $\langle \gamma_i, \gamma_i' \rangle = \pi_1(\widetilde{X})$

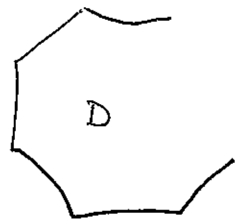
• γ_i, γ_i' forment une base de l'homologie ($b_1 = 2p$)

(• La forme d'intersection $\begin{pmatrix} \begin{matrix} & -1 \\ 1 & \end{matrix} & & \\ & \begin{matrix} & -1 \\ 1 & \end{matrix} & \\ & & \begin{matrix} & -1 \\ 1 & \end{matrix} \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$)



Pour chaque lacet c on construit une forme γ_c telle que

$$\int_c \varphi = \int_X \gamma_c \wedge \varphi$$



$$\int \gamma_i \wedge \gamma_j = \int_{c_i} \gamma_j$$

Soit ξ une 1-forme différentielle fermée sur Σ.

Comme le complémentaire D des a_i b_i est difféomorphe à une boule de $\mathbb{R}^2$, ξ est exacte sur D.

Comme $\tilde{X}$ est 1-connexe, ξ est exacte sur $\tilde{\Sigma}$

$$p^* \xi = d\varphi$$

Pour savoir si φ définit une fonction sur X, il faut vérifier l'invariance de φ par l'action du groupe fondamental.

$$\varphi(\gamma \tilde{x}) - \varphi(\tilde{x}) = \int_{\tilde{\gamma}} d\varphi = \int_{\tilde{\gamma}} p^* \xi = \int_{\gamma} \xi$$

il suffit donc de vérifier que les $\int_{\gamma_k'}$ et $\int_{\gamma_k}$ de ξ sont nulles.

Chapitre III — Théorie des fonctions sur une surface de Riemann

Le but de ce chapitre est de construire des fonctions méromorphes sur toute surface de Riemann.

L'idée est de construire des fonctions harmoniques avec singularités et (donc la partie réelle de fonction holomorphe). par un problème de minimisation.

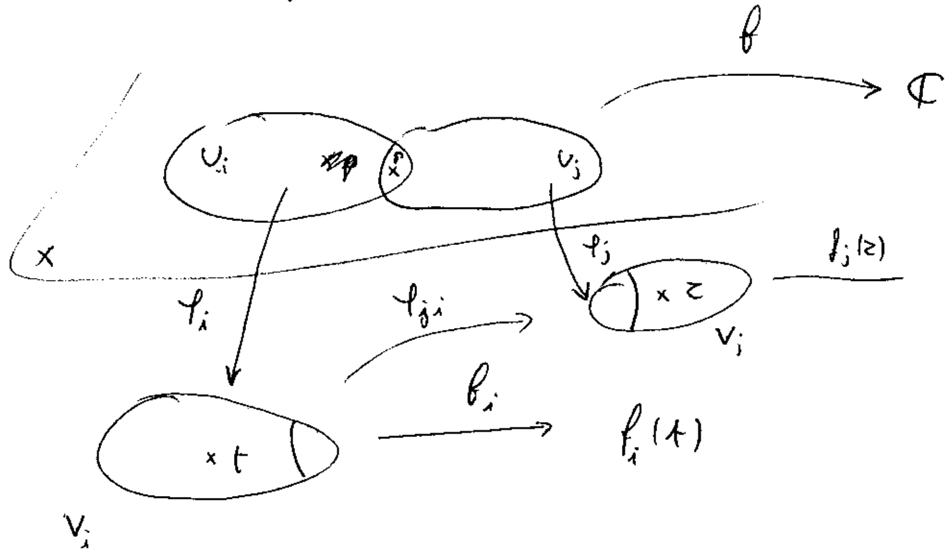
Les fonctions harmoniques U donnent lieu à des formes méromorphes $dU+i(dU)^*$, et par quotient à des fonctions méromorphes.

Dans le cas compact, on peut décrire les conditions qui assurent que la forme fermée $(dU)^*$ est exacte $(dU)^* = dU'$. La fonction $U+U'$ est alors méromorphe.

I) Différentielle méromorphe

Soit X une surface de Riemann et f une fonction méromorphe sur un ouvert de carte U de X.

Soit t une coordonnée holomorphe sur U



En général $\dfrac{d f_i^*}{dt}(\varphi_i(p)) \neq \dfrac{d f_j^*}{dz}(\varphi_j(p))$

Sur $U_i \cap U_j$ $\quad f_i \circ \varphi_i = f_j \circ \varphi_j$

$f_i = f_j \circ \varphi_{ji}$ où $\varphi_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est un biholomorphisme

$$\frac{d f_i}{dt}(\varphi_i(p)) = \frac{d f_j}{dz}(\varphi_j(p)) \; \frac{d \varphi_{ji}}{dt}(\varphi_i(p))$$

__Def__ : Une différentielle méromorphe ω sur X est la donnée sur chaque carte U_i de X d'une fonction méromorphe ω_i telle que sur $U_i \cap U_j$

$$\omega_i(\varphi_i(p)) = \omega_j(\varphi_j(p)) \; \frac{d \varphi_{ji}}{dt}(\varphi_i(p))$$

En particulier, le quotient de deux différentielles méromorphes est une fonction méromorphe sur X.

Les données $\frac{d\varphi_{ji}}{dt_i}(\varphi_i(p_i))$ sont appelées cocycles.

Remarque : Les données $\omega_i\, dt_i$ vérifient $\omega_i\, dt_i = \varphi_{ji}^*(\omega_j\, dt_j)$ et donnent donc une 1-forme méromorphe sur X.

II) Différentielles harmoniques

Si $\varsigma = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$

~~est~~ on définit la forme différentielle $d\varsigma$ de degré 2 par

$$d\varsigma = \left(-\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x}\right) dx \wedge dy$$

En particulier, ς est fermée quand $d\varsigma = 0$.

Dans ce cas, ς est localement exacte.

$$\varsigma = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

On remarque alors que

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dx \wedge dy = d\varsigma^*$$

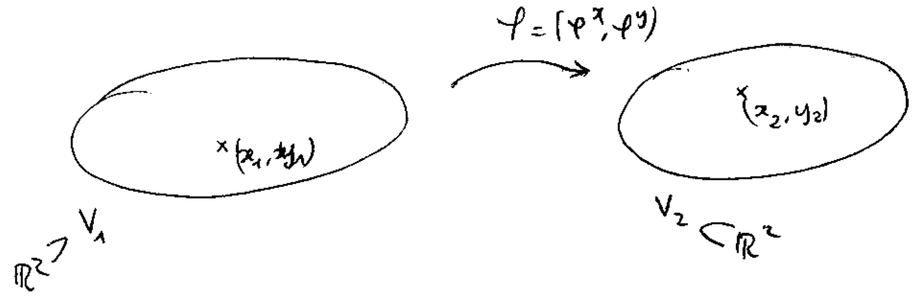
où $\varsigma^* = -b\,dx + a\,dy$.

Def : Si ς est une 1-forme sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$

on définit $\varsigma^* = -b\,dx + a\,dy$.

On dit que ς est harmonique si ς et ς^* sont fermées.

<u>Dem</u> : Si



$$\zeta_2 = a\,dx_2 + b\,dy_2 \qquad\qquad \zeta_2^* = -b\,dx_2 + a\,dy_2$$

$$\begin{aligned}\varphi^* \zeta_2 &= a(\varphi)\, d\varphi^x + b(\varphi)\, d\varphi^y \\ &= \left(a \frac{\partial \varphi^x}{\partial x_1} + b \frac{\partial \varphi^y}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left(a \frac{\partial \varphi^x}{\partial y_1} + b \frac{\partial \varphi^y}{\partial y_1} \right) dy_1\end{aligned}$$

$$\varphi^*(\zeta_2^*) = \left(-b \frac{\partial \varphi^x}{\partial x_1} + a \frac{\partial \varphi^y}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left(-b \frac{\partial \varphi^x}{\partial y_1} + a \frac{\partial \varphi^y}{\partial y_1} \right) dy_1$$

$$(\varphi^* \zeta_2)^* = \left(-a \frac{\partial \varphi^x}{\partial y_1} - b \frac{\partial \varphi^y}{\partial y_1} \right) dx_1 + \left(a \frac{\partial \varphi^x}{\partial x_1} + b \frac{\partial \varphi^y}{\partial x_1} \right) dy_1$$

$$\forall \zeta_2 \quad \varphi^* \zeta_2^* = (\varphi^* \zeta_2)^* \iff \mathrm{Jac}\, \varphi = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$\iff$ $d\varphi$ est $\mathbb{C}$-linéaire $\qquad i\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

$\iff$ $d\varphi$ est conforme pour les métriques euclidiennes plates sur $\mathbb{R}^2$

<u>Prop</u> : La correspondance entre 1-formes différentielles $\zeta \mapsto \zeta^*$ d'ouverts de $\mathbb{R}^2$ se prolonge sur les surfaces de Riemann.

<u>Prop</u> : Si ς est ~~est~~ une 1-forme différentielle harmonique sur une surface de Riemann X alors $\varsigma + i\varsigma^*$ est une 1-forme ~~analy~~ holomorphe sur X (càd méromorphe régulière).

<u>Dem</u> : Localement, ς est exacte et ς^* aussi

Sur U_j $\quad \varsigma = \frac{\partial f_j}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f_j}{\partial y}\,dy$

$$\varsigma^* = -\frac{\partial f_j}{\partial y}\,dx + \frac{\partial f_j}{\partial x}\,dy \quad \text{~~est fermée~~} = \frac{\partial g_j}{\partial x}\,dx + \frac{\partial g_j}{\partial y}\,dy$$

$$\cancel{\varsigma + i\varsigma^* = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) f_j \; (dx + i dy)}$$

On pose $h_j = f_j + i g_j \qquad \varsigma + i\varsigma^* = dh = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x} - i\frac{\partial f_j}{\partial y}\right) dz$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} h_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(f_j + i g_j) = 0$$

Donc h_j est une fonction holomorphe sur V_j et $\varsigma + i\varsigma^*$ est une différentielle holomorphe

⌈ Si h est holomorphe $\quad dh = \left(\frac{\partial h^x}{\partial x}dx + \frac{\partial h^x}{\partial y}dy \,,\, \frac{\partial h^y}{\partial x}dx + \frac{\partial h^y}{\partial y}dy\right)$

$$\in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$$

s'identifie à $\quad h'(z)\,dz = \frac{\partial h}{\partial z}(dx + i dy) \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x} - i\frac{\partial h}{\partial y}\right)(dx + i dy)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h^x}{\partial x}dx + \frac{\partial h^y}{\partial y}\cancel{dx} - \frac{\partial h^y}{\partial x}dy + \frac{\partial h^x}{\partial y}dy, \text{ imaginaire }\right)$$ ⌋

Condition de recollement :

Par définition $\quad \varsigma_i = \varphi_{ji}^* \varsigma_j \qquad \varsigma_j^* = \varphi_{ji}^* \varsigma_i^*$

Par linéarité $\quad (\varsigma_i + i\varsigma_i^*) = \varphi_{ji}^* (\varsigma_j + i\varsigma_j^*)$

Masse de Dirichlet

Si ξ est une 1-forme différentielle sur une surface de Riemann X,
(orientée par le choix dans toute carte $z_j = x_j + i y_j$ $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right)$ directe)
on pose la masse de Dirichlet

$$D(\xi) := \int_X \xi \wedge \xi^* = \int \sum_j \varphi_j \,(a_j\, dx_j + b_j\, dy_j) \wedge (-a_j\, dx_j + b_j\, dy_j)$$

$$= \sum_j \int_X \varphi_j \,(a_j^2 + b_j^2)\, dx_j \wedge dy_j \geqslant 0 .$$

Si u est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur X

$$D(u) := D(du).$$

Fonction harmonique sur le disque unité

$\Delta = \{ |z| < 1 \}$ le disque unité de $\mathbb{C}$. $\qquad \Delta_a = \{ |z| < a \}$

On dira qu'une fonction ~~caractéristique~~ sur $\overline{\Delta}$ est admissible sur $\overline{\Delta}$
si elle est continue sur $\overline{\Delta}$
continûment différentiable sur Δ
de masse de Dirichlet sur Δ finie : i.e. $D(u) = \lim_{a \to 1} \int_{\Delta_a} du \wedge du^*$ existe ds $\mathbb{R}$

Proposition : 1) Si u est admissible sur $\overline{\Delta}$ et harmonique sur Δ

alors $\forall z \in \Delta$ $\qquad u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \varphi)}\, v(\theta)\, d\theta \qquad z = re^{i\varphi}$

$v(\theta) = u(e^{i\theta})$.

2/ Si v est une fonction continue sur $\partial \Delta$, alors la formule précédente défini une fonction harmonique sur Δ dont les valeurs aux bord sont v.

3) Si ~~u~~ u' est admissible sur $\overline{\Delta}$ de valeur au bord v' alors la fonction u définie par les valeurs au bord v' (harmonique) et la formule $(*)$ a une masse de Dirichlet $D(u)$ inférieure à $D(u')$. En fait $D(u') = D(u) + D(u-u')$. (orthogonalité)

Dem : 1) On montre que si u est harmonique $u(0) = \int_{\partial\Delta} u(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2}$

et on utilise les biholomorphismes $z \mapsto \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}$ pour étendre la formule en z_0

2) On remarque que par la formule, u est la partie réelle de

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} v(\theta)\, d\theta. \qquad \text{holomorphe.}$$

3) h se développe pour $|z|<1$ par

$$h(z) = h(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \frac{1}{\pi} \int_0^1 e^{-in\theta} v(\theta)\, d\theta$$

On calcule

$$D^a(v, r^n \cos n\theta) = \int_{\Delta_a} dv \wedge d(r^n \cos n\theta)^*$$

$$e^{inz} = r^n \cos n\theta + i r^n \sin n\theta$$

$$= \int_{\Delta_a} dv \wedge d(r^n \sin n\theta)$$

$$= \int_{\partial\Delta_a} v\, d(r^n \sin n\theta)$$

$$= n a^n \int_{\partial\Delta_a} \cos n\theta\, v(\theta)\, d\theta$$

$$u(z) = u(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n P_n + b_n Q_n$$

avec $P_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} r^n \cos(n\theta)$ $\quad a_n = D(v, P_n)$

$Q_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} r^n \sin(n\theta)$ $\quad b_n = D(v, Q_n)$

On a donc exprimé u à l'aide des polynômes orthogonaux $\{P_n, Q_n\ n\in\mathbb{N}\}$ et des produits de Dirichlet de ces polynômes avec v.

On peut vérifier $\quad D^a(P_n, P_m) = \dfrac{a^n}{2\pi}\,\delta_{nm} = D^a(Q_n, Q_m)$

$D^a(P_n, Q_m) = 0$

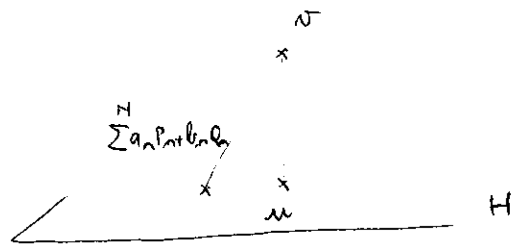
$$D^a(u) = \frac{a}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} a^n (a_n^2 + b_n^2)$$

Par ailleurs

$$D\Big(v - \sum_{n=1}^{N} a_n P_n + b_n Q_n\Big) = D(v) - \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \qquad (-2+1)$$

Donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ converge.

Donc $\quad \lim_a D^a(u)$ existe $\quad$ et $\quad D(u) \leq D(v)$



On cherche maintenant à contrôler ponctuellement u et ses dérivées

. A l'origine

$$\left|\frac{\partial h}{\partial z}\right|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{\pi}(a_1^2 + b_1^2) \leq \frac{1}{\pi} D(u)$$

$$\left|\frac{\partial^k h}{\partial z^k}\right|^2 \leq \frac{k!}{\pi k} D(u)$$

. Sur Δ, en utilisant les biholomorphismes

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \leq \frac{D(u)}{\pi(1-r^2)^2}$$

Ceci contrôle l'explosion des dérivées normales de u.

On peut aussi controller la norme L^2 de u par sa norme de Dirichlet

$$u(z)-u(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n P_n + b_n Q_n$$

et $$\int_{\Delta_a} P_n P_m^* \,dx\,dy = \frac{a^{2n+2}}{2n(n+1)} \delta_{nm} = \int_{\Delta_a} Q_n Q_m \,dx\,dy \qquad P_n \perp Q_m$$

Donc $$\int_{\Delta_a} |u-u(0)|^2 \,dx\,dy = \sum \frac{a^{2n+2}}{2n(n+1)} (a_n^2+b_n^2)$$

$$\leq \frac{a^{2n+2}}{4} D_a(u)$$

$$I(u-u_0) \leq \frac{1}{4} D(u) \qquad u \text{ harmonique admissible.}$$

Si v est admissible, on écrit $v = u + \underbrace{v-u}_{w}$ avec u harmonique et $u_{|\partial\Delta} = v_{|\partial\Delta}$.

$$w(re^{i\varphi}) = -\int_r^1 \frac{\partial w}{\partial r}(re^{i\varphi})\,dr$$

$$|w(re^{i\varphi})|^2 \leq \left|\int_r^1 \frac{\partial w}{\partial r}\sqrt{r}\,\frac{1}{\sqrt{r}}\,dr\right|^2 \leq \int_r^1 r\left|\frac{\partial w}{\partial r}\right|^2 dr \int_r^1 \frac{dr}{r}$$

$$\int_0^{2\pi} |w(re^{i\varphi})|^2 \,d\varphi \leq \left(\log\frac{1}{r}\right) D(w)$$

$$\int_\Delta |w|^2 r\,d\varphi\,dr \leq \frac{1}{4} D(w)$$

Maintenant, $I(v-v_0) \leq 2\left(I(u-u_0) + I(w)\right) \leq \frac{1}{2}\left(D(u)+D(w)\right) = \frac{1}{2} D(v)$

par orthogonalité.

où $v_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Delta} v = u(0)$

Fonction harmonique sur une surface de Riemann

Soit X une surface de Riemann, p_0 un point de X,
z une coordonnée dans une carte centrée en p_0.
On cherche une fonction harmonique sur X qui se comporte comme $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$ ~~au~~ voisinage de p_0,

Pour cela, on va minimiser la masse de Dirichlet sur un ensemble de fonctions admissibles.

Notations : $T_1 = \varphi^{-1}(\{|z| \leq 1\})$

$T_2 = \varphi^{-1}(\{|z| \leq 2\})$

$\phi(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + x$ En particulier $\frac{\partial \phi}{\partial r}(r=1) = 0$

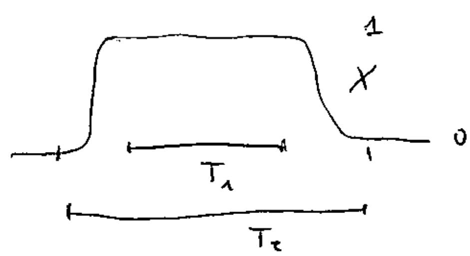
<u>Def</u> : Une fonction $V \in \mathcal{C}^1(X-\{p\}, \mathbb{R})$ est dite <u>admissible</u>
si • $\int_{\partial T_1} V = 0$

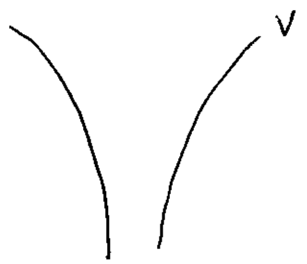
• $V - \phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur T_2

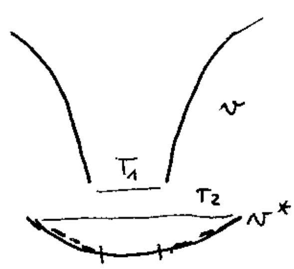
• $D_{X-T_1}(V)$ et $D_{T_1}(V-\phi)$ finies

On pose alors $v = V_{|X-T_1}$ $v^* = V-\phi_{|T_2}$

$$D(V) = D_{X-T_1}(v) + D_{T_1}(v^*)$$
$$= \int_X \chi\, dv^* \wedge (dv^*)^* + (1-\chi)\, dv \wedge (dv)^*$$
$$+ \int_{T_2-T_1} \chi \left(dv \wedge (dv)^* - dv^* \wedge (dv^*)^*\right)$$







On pose $\quad d = \inf_{V \text{ admissible}} D(V)$

On dit que $\lim_{V \text{ admissible}} f(V) = a$ si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ /$

$$|D(V) - d| \leq \delta \implies |f(V) - a| < \varepsilon$$

<u>Lemme 1</u> : Soit V_1 et V_2 deux fonctions admissibles telles que

$V_1 = V_2$ hors d'une boule B de la carte.

- Si $B \subset X - T_1 \qquad D(V_1) - D(V_2) = D_B(v_1) - D_B(v_2)$
- Si $B \subset T_2 \qquad D(V_1) - D(V_2) = D_B(v_1^*) - D_B(v_2^*)$

<u>Dem</u> : Si $B \subset X - T_1$ facile

Si $B \subset T_2$, on a un terme croisé puisque sur $T_2 - T_1 \quad v = v^* + \phi$

$$\int_1^2 \int_0^{2\pi} d(v_1^* - v_2^*) \wedge (d\phi)^* = \iint d(v_1^* - v_2^*) \wedge d\phi'$$

$$= \iint d\left[(v_1^* - v_2^*)\, d\phi'\right] = \left[\int_0^{2\pi} (v_1^* - v_2^*)\, d\phi'\right]_1^2$$

Mais sur $\partial T_2 \qquad v_1^* = v_2^*$

et sur $\partial T_1 \qquad \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \phi'}{\partial \theta} = \dfrac{\partial \phi}{\partial r} = 0.$

<u>Lemme 2</u> : ~~Soit K un compact de X.~~

~~Alors, il existe $C > 0$ telle que~~

1) $\forall V_1, V_2$ admissibles $\qquad \sqrt{D(V_1 - V_2)} \leq \sqrt{D(V_1) - d} + \sqrt{D(V_2) - d}$

⌈ On écrit $\qquad D\left(\dfrac{\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) \geq d$ ⌋

Par conséquent, la différence de deux fonctions minimales est constante.

2/ $\forall$ K compact (de carte), $\exists$ C / $\forall$ V_1, V_2 admissibles

$$I_K(V_1 - V_2) \leq C \; D(V_1 - V_2)$$

⌈ Ceci résulte de $I(v - v_0) \leq \frac{1}{2} D(v)$ sur le disque ⌋

3/ Si B est une boule de rayon a dans une carte,
il existe $C > 0$ / $\forall$ V_1, V_2 admissibles

$B \subset X - T_1$ $\qquad \left| M_B v_1 - M_B v_2 \right| \leq \frac{C}{a} \sqrt{D(V_1) - d} + \sqrt{D(V_2) - d}$

$B \subset T_2$ $\qquad \left| M_B v_1^* - M_B v_2^* \right| \leq$ ——————

⌈ résulte de Cauchy-Schwarz

$$\left| M_B (v_1 - v_2) \right|^2 \leq \pi a^2 \; I_B(v_1 - v_2)$$ ⌋

<u>Conséquence</u> : $B \subset X - T_1$, $\lim\limits_{v \text{ admissible}} M_B v$ existe, notée $u_{zB}(p)$

$B \subset T_2$ $\qquad v^*$ $\qquad u^*_{zB}(p)$.

<u>Lemme 3</u> : u_{zB} est harmonique sur $X - T_1$
u^*_{zB} sur T_2
$u_{zB} = u^*_{zB} + \phi$ sur $T_2 - T_1$
u_{zB} ne dépend ni de la boule B choisie
ni de la coordonnée holomorphe z.

<u>Dem</u> : On considère pour chaque v admissible, la fonction v_h sur $\overline{B}$ harmonique avec les mêmes valeurs ~~et~~ au bord et v_ε une suite de régularisées de $\begin{cases} v_h & \text{sur } B \\ v & \text{sur } X - B \end{cases}$.

$D_B(v_h) \leq D_B(v_\varepsilon) \leq D_B(v)$ $\qquad$ Ici, on utilise que les dérivées de v_h explose au bord au plus comme $\frac{1}{1 - r^{\alpha}}$

~~D_B~~

$$\sqrt{D_B(v_1 - v_\varepsilon)} \leq \sqrt{D(v_1)-d} + \sqrt{D(v)-d}$$ v_ε admissible.

A la limite $\sqrt{D_B(v_1 - v_h)} \leq$ v_h est admissible sur $\bar{B}$

On en déduit comme dans le lemme 2

$$\left| M_B v_1 - M_B v_h \right| \leq \frac{c}{a}\left(\sqrt{D(v_1)-d} + \sqrt{D(V)-d}\right)$$

$$\left| M_B v_1 - v_h \right|(z) \leq \frac{c}{a-|z|}\left(\qquad \right)$$

Donc la fonction u_{zB} est limite uniforme sur $B_{a-\varepsilon}$ de la suite de fonction harmonique v_h. Par conséquent elle est harmonique.

Les autres propriétés se démontrent de façon analogue en remplaçant v par v_h avant de faire tendre $D(v)$ vers d.

Par exemple $\quad D_B(v - v_h) \leq 4\left(D(v)-d\right)$

$$I_B(v - v_h) \leq \frac{1}{4} D_B(v-v_h) \leq D(v)-d$$

$$\left| Mv - Mv_h \right|^2 \leq \left| Mv - v_h(p)\right|^2 \leq \frac{1}{\pi}\left(D(v)-d\right)$$

$$\text{Donc} \quad \lim_{v} M_{zB}\, v = \lim_{v} \bar{v}(p)$$

ne dépend pas du choix de la coordonnée z à biholomorphisme près.

La fonction $U = \begin{cases} u & \text{sur } X - T_1 \\ u^* + \phi & \text{sur } T_2 \end{cases}$ est donc harmonique

avec la singularité prescrite.

Si la surface de Riemann X est compacte, la singularité caractérise la fonction harmonique à une constante près.

Si X n'est pas compacte, il faut ~~q~~ montrer que U minimise la fonctionnelle de Dirichlet : ceci la caractérisera à une constante additive près.

Prescrire d'autres singularités

On dira que deux fonctions sur X ~~sont~~ ont des singularités comparables en p si leur différence est de classe C^∞ au voisinage de p.

* On peut obtenir une fonction harmonique sur X avec singularité comparable à $\mathrm{re}\left(\frac{1}{z^n}\right)$ (resp. $\mathrm{im}\left(\frac{1}{z^n}\right)$) en p_0.

On la notera $X^n_{p_0}$ (resp. $Y^n_{p_0}$) $n \geq 1$

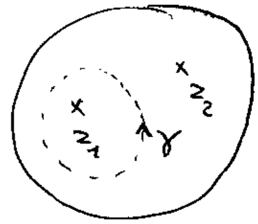
On notera $\omega^n_{p_0} = d X^n_{p_0} + i (d X^n_{p_0})^*$ $\eta^n_{p_0} = d Y^n_{p_0} + i (d Y^n_{p_0})^*$

* On peut obtenir une fonction harmonique avec singularité comparable à $\frac{1}{2\pi} \mathrm{re} \log\left(\frac{z - z_2}{z - z_1}\right)$.

On la notera $R_{p_1 p_2}$ et $\rho_{p_1 p_2} = d R_{p_1 p_2} + i (d R_{p_1 p_2})^*$

* La fonction $\frac{1}{2\pi} \mathrm{im} \log\left(\frac{z - z_2}{z - z_1}\right)$ n'est pas uni-valuée dans le disque T_1.

Un tour autour de z_1 seulement change sa valeur.



Mais elle est univaluée sur $T_2 - T_1$ ainsi que la fonction

$\phi = \mathrm{Im} \cdot \log \left(\dfrac{z - z_2}{z - z_1} \Big/ \dfrac{1 - \bar{z}_2 z}{1 - \bar{z}_1 z} \right)$ dont la dérivée normale

~~sur~~ est nulle sur ∂T_1.

On obtient alors une fonction harmonique u sur $X - T_1$ et une autre u^* harmonique sur T_2 telles que $u = u^* + \phi$ sur $T_2 - T_1$.

On notera, $d\Theta_{p_1 p_2} = \begin{cases} du \text{ sur } X - T_1 \\ du^* + d\phi \text{ sur } T_2 \end{cases}$ même si $d\Theta$ n'est pas exacte sur X.

On notera $\iota_{p_1 p_2} = d\Theta + i\,(d\Theta)^*$

* Pour deux points lointains, a et b, on choisit un chemin γ reliant a à b des points p_k sur γ tels que deux successifs sont dans le même ouvert de carte et on pose

$$R_{a,b}^{\gamma,p} = \sum R_{p_k p_{k+1}}$$ sans singularité hors de $\{a,b\}$

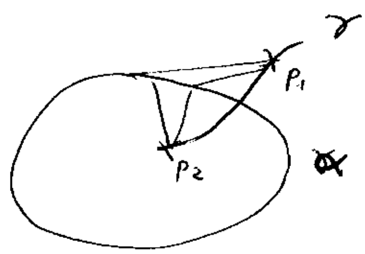
Si X est compacte, comme les fonctions harmoniques régulières sont constantes, $R_{ab}^{\gamma p}$ ne dépend ni du choix des p_k sur γ ni du choix de γ.

De la même manière on pose

$$d\,\theta_{ab}^{\gamma,p} = \sum d\,\theta_{p_k p_{k+1}}$$ avec des pôles d'ordre 1 en a et b de résidu -1 et 1.

Si α est un lacet qui ne passe ni par a ni par b

$$\int_\alpha d\,\theta_{ab}^{\gamma p} = \mathrm{int}(\alpha, \gamma)$$



Comme une forme fermée dont l'intégrale sur tous les lacets générateurs de π_1 est nulle est exacte, on en déduit que $d\,\theta_{ab}^{\gamma,p}$ ne dépend à forme exacte près ni du choix des p_k sur γ, ni du choix de γ dans sa classe d'homotopie.

<u>Lemme 1</u> : Sur une surface de Riemann fermée, toute 1-forme harmonique et exacte est nulle.

<u>Dem</u> : $\varphi = df$ $\quad d\varphi^* = \Delta f \; dx \wedge dy = 0$. Donc f est harmonique sur X compacte donc constante.

Par conséquent $d I_{ab}^{\gamma, h}$ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ.

Formes harmoniques ~~et formes holomorphes~~ régulières sur X (Théorème de Hodge)

Soit $\gamma_1, \dots \gamma_k$ un système générateur de $\pi_1(X, a)$ qui est une base de l'homologie de X.

On rappelle qu'une forme fermée ξ sur X est exacte si et seulement si les intégrales $\int_{\gamma_k} \xi = 0$.

$$H_1(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}\text{-Combinaisons linéaires de lacets} \Big/ \text{Relation d'homologie} = \bigoplus \mathbb{R}\, \gamma_k$$

$$H^1(X, \mathbb{R}) = \{1\text{-forme différentielle fermée}\} \Big/ \{\text{forme différentielle exacte}\}$$

$$\begin{array}{ccc} H_1(X, \mathbb{R}) \times H^1(X, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ [\gamma] \;,\; [\xi] & \longmapsto & \int_\gamma \xi \end{array}$$

est bien définie et non dégénérée.

A chaque lacet γ_k, on associe

$d\Theta_k = d\,\Theta_{aa}^{\gamma_k}$ harmonique lisse (mais pas exacte !)

~~$w_k = \xi_k + i\,\xi_k^*$ holomorphe lisse.~~

<u>Lemme 2</u> Pour toute 1-forme fermée ξ sur X

$$\int_X d\Theta_k \wedge \xi = \int_{\gamma_k} \xi$$

Dem : $\quad d\Theta_{p_1p_2} = \begin{cases} du & \text{sur } X - T_1 \\ du^* + d\phi & \text{sur } T_2 \end{cases}$

$$\int_X d\Theta_{p_1p_2} \wedge \zeta = \int_{X-T_1} d\Theta \wedge \zeta + \int_{T_1} d\Theta \wedge \zeta$$

$$= \int_{X-T_1} du \wedge \zeta + \int_{T_1} (du^* + d\phi) \wedge df$$

car ζ fermé sur T_1 simplement convexe est exacte sur T_1

$$= -\int_{\partial T_1} u\zeta + \int_{\partial T_1} du^* f - \int_{T_1} df \wedge d\phi$$

$$=$$

$$\int_{T_1} df \wedge d\phi = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{T_1 - D(p_1,\varepsilon) - D(p_1,\varepsilon)} df \wedge d\phi$$

car $d\phi$ est intégrable

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int d(f\, d\phi)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial T_1} f\, d\phi - \int_{\partial D(p_1,\varepsilon)} f\, d\phi - \int_{\partial D(p_2,\varepsilon)} f\, d\phi$$

$$= \int_{\partial T_1} f\, d\phi + f(p_1) - f(p_2)$$

$$\int_{\partial T_1} u\zeta = \int_{\partial T_1} u\, df = -\int_{\partial T_1} f\, du$$

$$\cancel{\int_{\partial T_1} u^* f^* = \int_{\partial T_1} f\, du^*}$$

Donc $\displaystyle\int_X d\Theta_{p_1p_2} \wedge \zeta = f(p_2) - f(p_1) = \int_{p_1}^{p_2} \zeta$

Théorème : $[d\Theta_k]$ est une base de $H^1(X, \mathbb{R})$

Par le lemme 1, une relation en cohomologie entre les $[dI_k]$ donne une relation entre les dI_k. Par le lemme 2, on en déduit une relation en homologie entre les $[\gamma_k]$. Par conséquent $[d\Theta_k]$ est une famille libre et donc une base par compte de dimension par la dualité entre $H^1(X, \mathbb{R})$ et $H_1(X, \mathbb{R})$.

Corollaire (Version simple du théorème de Hodge)

Toute forme fermée est égale à une forme harmonique plus une forme exacte.

Formes holomorphes sur X (différentielles abéliennes de $1^{ière}$ espèce)

A chaque lacet γ_k, on associe la forme holomorphe lisse $w_k = d\theta_k + i(d\theta_k)^*$

Comme les $d\theta_k$ forment une famille libre, les w_k sont $\mathbb{R}$-indépendants.

Comme les $d\theta_k$ forment une famille génératrice de l'espace des formes harmoniques et que la partie réelle d'une forme holomorphe lisse est harmonique lisse, les w_k forment une $\mathbb{R}$-base de cet espace.

On retrouve en particulier que h est pair. $h = 2\dim_{\mathbb{C}} H^0(\Omega^1_X)$
$= 2p$

Périodes

$s_{jk} = \int_{\gamma_j} d\theta_k = \mathrm{int}(\gamma_j, \gamma_k) = -s_{kj}$ (valable sur S différentiable)
S est la matrice de l'accouplement non dégénéré et la matrice de la forme d'intersection.

$t_{jk} = \int_{\gamma_j} (d\theta_k)^* = \int_X d\theta_j \wedge (d\theta_k)^* = t_{kj}$ et la matrice T est la matrice des produit de Dirichlet.

T est définie positive.

$p_{jk} = \int_\gamma w_k$ $\qquad P = S + iT$ $\qquad$ S anti-symétrique non dégénérée
T définie positive.

Différentielles abéliennes de $2^{ième}$ espèce (Forme méromorphe dont tous les résidus sont nuls)

En combinant les formes $w^n_{m,p} = d\chi^n_{m,p} + i(d\chi^n_{m,p})^*$ et η^n_p on obtient des formes méromorphes avec pôles prescrits d'ordre au moins 2 et périodes imaginaires pures.

Différentielles abéliennes de $3^{ième}$ espèce

On choisit un point $a \in X$. En combinant $\rho_{a,p} = dR_{a,p} + i(dR_{a,p})^*$ on obtient des formes méromorphes avec pôles simples prescrits, régulière en a si la somme des résidus aux points p est nulle.

Fonctions méromorphes additives sur $\tilde{X}$ - Théorème de Riemann-Roch

On suppose toujours X compacte

<u>Lemme :</u> Soit $\tilde{X}$ une surface de Riemann simplement connexe.

et $\sum_{k=-m}^{+\infty} a_k t^k$ un germe de fonction méromorphe.

Si le prolongement analytique est possible le long de tout chemin, alors il définit une fonction méromorphe (uni-valuée) sur $\tilde{X}$.

<u>Lemme :</u> Si ω est une 1-forme méromorphe sur une surface de Riemann $\tilde{X}$ simplement connexe avec des résidus partout nuls, alors c'est la différentielle d'une fonction méromorphe uni-valuée sur $\tilde{X}$.

Les fonctions harmoniques X_{n,p_0} et Y_{n,p_0} donnent lieu aux différentielles méromorphes $\varphi_{n p_0} = dX_{n,p_0} + i(dX_{n,p_0})^*$ et $\eta_{n p_0} = dY_{n p_0} + i(dY_{n p_0})^*$ avec pôles d'ordre $n+1 \geqslant 2$ et donc à des fonctions méromorphes sur $\tilde{X}$

Pour vérifier que ces fonctions proviennent de X, il faut vérifier qu'elles sont invariantes par l'action du groupe fondamental $\pi_1(X, a)$

La différence des valeurs en $\tilde{p}$ et $\tilde{\gamma}+\tilde{p}$ se calcule par

$$\int_{\tilde{\gamma}} \pi^* \varphi_{n p_0} = \int_{\gamma} \varphi_{n p_0} = i \int_{\gamma} (dX_{n p_0})^*$$

et

$$\int_{\gamma} \eta_{n p_0} \quad i \int_{\gamma} (dY_{n p_0})^* =$$

On cherche à exprimer ces périodes à l'aide des formes holomorphes W_k associées à la familles de lacet γ_k.

Pour calculer $d\theta_{p_0 p_1}$ on a utilisé $\phi_{z_0 z_1} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \log \left(\frac{z - z_1}{z - z_0} \Big/ \frac{1 - \bar{z}_1 z}{1 - \bar{z}_0 z} \right)$

Avec $p_0 = 0$ et $p_1 = \varepsilon z_1$ on trouve z_1 réel

$$\phi_{z_0 z_1} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \log \frac{z - \varepsilon z_1}{z(1 - \varepsilon \bar{z}_1 z)} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon^n (z^{-n} + z^n)}{n} z_1^n$$

En utilisant la fonction auxiliaire $\phi_{z_0 z_1} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon^n (z^{-n} + z^n)}{n} z_1^n$

on peut montrer la convergence de $\left(\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon^n}{n} d\zeta_{n p_0} \right)_N$ vers $d\theta_{p_0 p_1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \pi_e dw$

Par conséquent $$\int_0^{z_1} \eta_{n p_0} = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \operatorname{Im} \frac{d^n \iota_{p_0 p_1}}{dz^n} (p_0)$$

En suivant un chemin γ_k, on trouve

$$\int_{\gamma_k} \eta_{n p_0} = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \operatorname{Im} \frac{d^{n-1}}{dz^n} w_k (p_0)$$

De même

$$\int_{\gamma_k} \varphi_{n p_0} = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \operatorname{Re} \frac{d^{n-1}}{dz^n} w_k (p_0)$$

<u>Corollaire</u> : Soit $p_1 \dots p_d$ d points distincts,

Si $d > g (= \frac{h}{2})$ il existe une fonction méromorphe sur X avec au plus des pôles simples aux points p_i

$$\forall k \int_{\gamma_k} \sum_{\ell=1}^{d} \lambda_\ell \varphi_{1 p_\ell} + \sum_{\ell=1}^{d} \mu_\ell \eta_{1 p_\ell} + \cancel{} = 0$$

$\operatorname{Res}(P_{1 p_\ell}) = 1$ $\quad$ $\operatorname{Res}(i_{1 p_\ell}) = i$ $\quad$ $\operatorname{Re}(i z^{-n}) = \frac{y^n}{(x^2+y^2)^n}$

Donc $(P_{1 p_\ell}, i_{1 p_\ell})_{\ell = 1 \dots d}$ sont $\mathbb{R}$-indépendantes.

On reprend à partir des formules pour les périodes des formes méromorphes

$$\eta_{m p_0} = d X_{m p_0} + i (d X_{m p_0})^*$$

$$\omega_{m p_0} = d Y_{m p_0} + i (d Y_{m p_0})^*$$

$X_{m p_0} \sim \mathrm{Re} \dfrac{1}{(z - z(p_0))^m}$

$\eta_{m p_0} \sim -m \dfrac{dz}{(z-z(p_0))^{m+1}}$

$Y_{m p_0} \sim \mathrm{Im} \dfrac{1}{(\quad)}$

$\omega_{m p_0} \sim -m \dfrac{i dz}{(z-z(p_0))^{m+1}}$

$$\int_{\gamma_k} \eta_{m p_0} = \frac{2\pi i}{(m-1)!} \mathrm{Im} \frac{d^{m-1}}{dz^m} W_k(p_0)$$

$$\int_{\gamma_k} \omega_{m p_0} = \frac{2\pi i}{(m-1)!} \mathrm{Re} \frac{d^{m-1}}{dz^m} W_k(p_0)$$

où W_k est la forme holomorphe associée au cycle γ_k.

Soit $p_1, \dots p_N$ N points distincts
$m_1 \dots m_N$ N entiers naturels.

On note $H^0(X, \mathcal{O}(\Sigma m_i p_i))$ l'espace des fonctions méromorphes sur X avec au plus des pôles d'ordre m_i aux points p_i

$H^0(X, \Omega^1_X(-\Sigma m_i p_i))$ l'espace des 1-formes ~~holomorphes~~ sur X avec au moins des zéros d'ordre m_i aux points p_i

Puisque les w_k forment une $\mathbb{R}$-base de l'espace des 1-formes holomorphes sur X,

$$\dim_{\mathbb{R}} H^0(X, \Omega^1_X(-\Sigma m_i p_i)) = h - 2\,\mathrm{Rang}_{\mathbb{C}} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^m} w_k(p_i) \right)_{\substack{1 \leq k \leq h \\ 1 \leq i \leq N \quad 0 \leq m \leq m_i}}$$

Soit $f \in H^0(X, \mathcal{O}(\Sigma m_i p_i))$

On fixe des coordonnées z_i au voisinage de p_i

$$f = \sum_{m=1}^{m_j} (a_m^j + i b_m^j) z_j^{-m} + O(1)$$

au voisinage de p_j

Alors
$$df - \sum_{i=1}^{N} \sum_{m=1}^{m_i} a_m^i \eta_{m p_i} + b_m^i \omega_{m p_i}$$

est une 1-forme holomorphe sur X, donc $\mathbb{R}$-combinaison linéaire des w_k, soit $\sum_{k=1}^{h} \lambda_k w_k$

Donc
$$df = \sum_{i=1}^{N} \sum_{m=1}^{m_i} a_m^i \eta_{m p_i} + b_m^i \omega_{m p_i} + \sum_{\ell=1}^{h} \lambda_\ell w_\ell$$

Comme les périodes de df sont nulles et celles des $\eta_{m p_i}$ et $\omega_{m p_i}$ imaginaires pures,

$$\forall k \qquad \sum_{\ell=1}^{h} \lambda_\ell \, \mathrm{Re} \int_{\gamma_k} w_\ell = 0$$

$$\sum_{\ell=1}^{h} \lambda_\ell \quad \mathrm{Int}(\gamma_k, \gamma_\ell) = 0$$

Comme la matrice d'intersection est non dégénérée, les λ_ℓ sont nuls.

En écrivant que $\sum_{i=1}^{N} \sum_{m=1}^{n_i} a_m^i \, \eta_{m p_i} + b_m^i \, \omega_{m p_i}$ de deuxième espèce ~~pro~~ est exacte si et seulement si ses périodes sont nulles, on obtient que la $\mathbb{R}$-dimension de $H^0(X, \mathcal{O}(\sum n_i p_i))$ est

$$2 \sum_{i=1}^{N} n_i - \mathrm{rang}_{\mathbb{R}} \left(\int_{\gamma_k} \eta_{m p_i} , \int_{\gamma_k} \omega_{m p_i} \right)_{\substack{1 \le k \le h \\ 1 \le i \le N \quad 1 \le m \le n_i}}$$

Théorème de Riemann-Roch

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(\sum n_i p_i)) - h^1(X, \Omega^1_X(-\sum n_i p_i)) = \sum n_i + 1 - \frac{h}{2}$$

On trouve en particulier que si $\sum n_i > \frac{h}{2}$ il y a une fonction méromorphe non constante avec pôle d'ordre au plus n_i aux points p_i.

On va montrer que pour des points généraux, si $\sum_{i=1}^{N} 1 = \frac{h}{2}$ alors $H^0(X, \mathcal{O}_X(\sum p_i)) = \mathbb{C}$. Ceci donne une caractérisation analytique de h.

Sinon, on choisit $w_1 \dots w_{\frac{h}{2}}$ indépendants sur $\mathbb{C}$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{w_1}{dz_1}(p_1) & \frac{w_1}{dz_2}(p_2) & \cdots & \frac{w_{h/2}}{dz_N}(p_N) \\ & & & \\ \frac{w_h}{dz_1}(p_1) & \frac{w_h}{dz_2}(p_2) & & \end{pmatrix} = 0$$

On fixe $p_2 \cdots p_N$. On trouve $\sum_{i=1}^{h/2} \text{mineur}(p_2, \cdots p_N) \; w_i(p) = 0$

Par indépendance des w_i, on déduit que les mineurs sont nuls.

De proche en proche on déduirait que les w_i sont nuls.

Chap IV — Etude des applications entre surfaces de Riemann.

Dolbeault

Dans ce chapitre, on supposera les surfaces de Riemann connexes.

Lemme : Toute fonction méromorphe f sur une surface de Riemann connexe X définit une application holomorphe F de X dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

Dem : Soit P l'ensemble des pôles de f - L'application $f : X - P \to \mathbb{C}$ est holomorphe et $f : X \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est continue.

On choisit une carte de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ centrée en ∞, soit $\mathcal{U}_\infty \xrightarrow{h_\infty} \mathcal{V}_\infty \subset \mathbb{C}$

Soit U un ouvert de carte de X tel que $f(U) \subset \mathcal{U}_\infty$

$h_\infty \circ f \circ h^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} X \supset U & \xrightarrow{f} & \mathcal{U}_\infty \subset \mathbb{P}^1 \\ \downarrow h & & \downarrow h_\infty \\ \mathbb{C} \supset V & & \mathcal{V}_\infty \subset \mathbb{C} \end{array}$$

est une application holomorphe sur $h(U-P)$ bornée au voisinage de $h(P)$ discret.

Par le théorème de prolongement de Riemann, on obtient une application holomorphe $V \to \mathcal{V}_\infty$ donc de $U \to \mathcal{U}_\infty$.

Etude locale des morphismes de surfaces de Riemann

Théorème : Soit $f : X \to Y$ un morphisme non constant de surfaces de Riemann - Pour tout point a de X il existe une carte $h : U_a \to V$ centrée en a et une carte $\mathcal{U}_{f(a)} \to \mathcal{V}$ centrée en $f(a)$ et $n \in \mathbb{N}$ telles que

$$\begin{array}{ccc} a \in U_a & \longrightarrow & \mathcal{U}_{f(a)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C} \supset V & \longrightarrow & \mathcal{V} \subset \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^n \end{array}$$

n s'appelle la multiplicité de f en a.

<u>Démonstration</u> : On prend une boule de carte centrée en a

$$\begin{tikzcd}
V'_a \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{U}'_{f(a)} \arrow[d] \\
V' \arrow[r] & \mathcal{V} \\
z \arrow[r, mapsto] & z^n(1+g(z))
\end{tikzcd}$$

Quitte à restreindre V'_a, $1+g(z) = (\lambda(z))^n$.

On choisit la carte

$$\begin{tikzcd}
 & V_a \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[d] & \mathcal{U}_{f(a)} \\
z \arrow[r, "\text{bihol}"'] & \lambda(z)z & \\
 & Z \arrow[u, phantom, "\shortparallel"] \arrow[r] & Z^n
\end{tikzcd}$$

<u>Corollaire</u> : * Toute application non constante entre surfaces de Riemann ~~connexes~~ est ouverte.

* Si de plus X est compacte, f est surjective et Y compacte. (f(X) est ouverte et compacte)

Un point a de X est dit de <u>ramification</u>, s'il n'existe pas de voisinage V de a sur lequel f est injective.

Si $n(a) = 1$ f n'est pas ramifié en a, c'est un biholomorphisme local

Si $n(a) > 1$ f est ramifié en a.

Etude globale

<u>Théorème</u> : Soit $f : X \to Y$ un morphisme non constant, propre de surfaces de Riemann connexes. Alors, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que chaque valeur de Y est prise exactement n fois.

<u>Dem</u> : Comme deux morphismes qui coïncident sur une partie avec point d'accumulation coïncident partout, et que f est non constant, les fibres de f sont discrètes. Comme f est propre, elles sont compactes donc finies.

Soit R l'ensemble des points de ramification, $f(R)$ l'ensemble des valeurs critiques.

$f' : X - f^{-1}(f(R)) \longrightarrow \cancel{X} - f(R)$ est un morphisme non ramifié. ~~de sorte~~ C'est un biholomorphisme local. f' est propre. C'est donc un revêtement.

Comme $Y - f(R)$ est connexe par arc, les fibres de f' ont toutes le même cardinal.

Soit c_0 une valeur critique de f et $f^{-1}(c_0) = \{x_1, \dots x_r\}$

Il existe des voisinages U_i de x_i, deux à deux disjoints tels que $f : U_i \to \mathcal{U}_i$ soit $z \mapsto z^{n_i}$ dans une carte.

$X - (U_1 \cup \dots \cup U_i)$ est fermé, f est propre donc $Y - f(X - U_1 \cup \dots \cup U_r) = \mathcal{U}$ est ouvert et $f^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}_1 \cup \dots \cup U_i$. Pour un point de $\cancel{f^{-1}}\, \mathcal{U} - \{c_0\}$ le nombre de préimages est $\sum_{i=1}^{r} n_i$.

Corollaire : Sur une surface de Riemann compacte, toute fonction méromorphe f a autant de zéros que de pôles comptés avec multiplicité.
C'est le nombre de feuillets de l'application $F : X \to \mathbb{P}^1$.

On appellera revêtement ramifié tout morphisme non constant, propre entre surfaces de Riemann connexes.

Applications du théorème de Riemann-Roch

Soit X une surface de Riemann compacte connexe. Il existe une fonction méromorphe non constante avec un pôle d'ordre inférieur à $\frac{h}{2} + 1$. Cette fonction fait de X un revêtement de $\mathbb{P}^1$ à moins de $\frac{h}{2} + 1$ feuillets.

Corollaire : Si $h = 0$ alors X est isomorphe à $\mathbb{P}^1$.

Si $h \geq 1$, soit d_X le nombre de zéros compté avec multiplicité d'une 1-forme holomorphe ζ non nulle.
Comme le quotient de ζ par une 1-forme méromorphe df, f méromorphe est une fonction méromorphe, si X est une courbe algébrique lisse, $d_X = d_{\Sigma(X)}$. d_X s'appelle degré canonique de X

On note $\operatorname{div} \zeta = \sum n_i p_i$ si p_i est un zéro de ζ de multiplicité n_i

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, \mathcal{O}(\operatorname{div} \zeta)) & \longrightarrow & H^0(X, \Omega^1_X) \\ f & \longmapsto & f\zeta \end{array}$$

est bijective.

Donc,

$$\begin{aligned} d_X + 1 - \frac{h}{2} &= h^0(X, \mathcal{O}(\operatorname{div} \varsigma)) - h^0(X, \Omega^1_X(-\operatorname{div}\varsigma)) \\ &= h^0(X, \Omega^1_X) - 1 \\ &= \frac{h}{2} - 1 \end{aligned}$$

Donc $\quad d_X = h - 2 \qquad \boxed{d_X = 2g - 2}$

$g = \frac{h}{2}$ s'appelle le genre topologique de la surface de Riemann X.

Si X est une courbe algébrique plane lisse, on trouve

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

<u>Genre et ramification</u>

Si $f : X \to Y$ est un morphisme non constant de surfaces de Riemann compactes connexes, on peut calculer le degré canonique de X

en choisissant ~~comme~~ forme méromorphe sur X, l'image réciproque $f^*\varsigma$ d'une forme méromorphe ς sur Y avec pôles non critique pour f.

Un zéro de ς qui n'est pas une valeur critique donne n zéros de $f^*\varsigma$.

Un zéro de ς qui est une valeur critique ς de f avec multiplicité n_i sur x_i contribue pour $\Sigma(n_i - 1) + \Sigma n_i \operatorname{ord} du = n \operatorname{ord} du + \Sigma(n_i - 1)$

$\varsigma \overset{loc}{\underset{\varsigma}{\simeq}} du \qquad f^*\varsigma \underset{x_i}{\simeq} d(u \circ f) \simeq d(u(z^{n_i})) = n_i z^{n_i - 1} du(z^{n_i})$

On trouve donc Riemann - Hurwitz

$$d_X = n\, d_Y + \sum (n_i - 1)$$

ou encore

$$g(X) - 1 = n\,(g(Y) - 1) + \frac{1}{2} \sum (n_i - 1)$$

En particulier $g(X) \geq g(Y)$.

Si X est une surface de Rieman de genre $g = 1$, on peut la réaliser comme revêtement de $\mathbb{P}^1$ de degré $g+1 = 2$ donc avec $d_X - 2\, d_{\mathbb{P}^1} = 4$ points de ramification.

Si X est une surface de Rieman de genre $g = 2$, le quotient de deux formes holomorphes indépendantes sur $\mathbb{C}$ donne une fonction méromorphe avec au plus $d_X = 2$ zéros.
X est donc aussi un revêtement de degré 2 de $\mathbb{P}^1$ avec $d_X - 2\, d_{\mathbb{P}^1} = 6$ points de ramification.

~~Morphismes de surfaces de Riemann et extension des corps~~

Sur le corps des fonctions méromorphes d'une surface de Riemann compacte.

On a vu que ~~t~~oute surface de Riemann compacte X connexe peut être réalisée comme revêtement de $\mathbb{P}^1$ à $(g+1)$ feuillets.
~~β~~ L'ensemble $\mathcal{M}(X)$ est non vide, intègre si X est connexe
C'est alors un corps

Morphismes de surfaces de Riemann et extension de corps

(Dolbeault)

<u>Théorème</u> : Soit $\pi : X \to Y$ un revêtement ramifié de surfaces de Riemann (morphisme propre, non constant entre surface de Riemann connexes).

Alors $\pi^* : \mathcal{M}(Y) \longrightarrow \mathcal{M}(X)$ est un morphisme de corps qui fait de $\mathcal{M}(X)$ une extension algébrique de $\mathcal{M}(Y)$ de degré inférieur au nombre n de feuillets de π.

$\mathcal{M}(X)$ est engendré en tant qu'algèbre sur $\mathcal{M}(Y)$ par toute fonction de degré maximal, et en particulier par toute fonction qui prend n valeurs distinctes sur une fibre de π.

<u>Corollaire</u> : Si X est une surface de Riemann compacte de genre g, $\mathcal{M}(X)$ est une extension algébrique de $\mathbb{C}(x)$ de degré inférieur à $(g+1)$. $\mathcal{M}(X)$ est donc de degré de transcendance 1 sur $\mathbb{C}$, engendrée en tant qu'algèbre par x et une fonction méromorphe de degré maximal sur $\mathbb{C}(x)$. C'est donc le corps des fonctions rationnelles d'une courbe algébrique plane.

<u>Dem</u> : $\mathcal{M}(X)$ et $\mathcal{M}(Y)$ sont non vides

Comme X et Y sont connexes, $\mathcal{M}(X)$ et $\mathcal{M}(Y)$ sont intègres.

On vérifie facilement que ce sont des corps.

Comme π est surjective ($n \geq 1$), π^* est bien définie et c'est un morphisme de corps.

Soit $f \in \mathcal{M}(X)$ et $c \in Y$ une valeur non critique du revêtement π.
π est donc non ramifié sur un voisinage U de c.
$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{j=1}^{n} V_j$ et $\pi_{|V_j} = \pi_j : V_j \to U$ est un biholomorphisme.

On pose alors $f_j : \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ y \longmapsto f(\pi_j^{-1}(y)) \end{array}$ et on définit les fonctions

symétriques de f sur U par

$$\prod_{j=1}^{n} (T - f_j(y)) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sigma_k(y) \, T^{n-k}$$

$$\sigma_1(y) = f_1(y) + \dots + f_n(y)$$

$$\sigma_2(y) = \sum_{i<j} f_i(y) f_j(y)$$

Ce sont des fonctions méromorphes sur U.
Sur l'intersection $U \cap U'$ de deux ouverts, qui ne contiennent pas de valeur critique de π, les fonctions symétriques coïncident.
On obtient donc des fonctions méromorphes σ_i sur $Y - \pi(R)$.

Si c_0 est une valeur critique de π et y une coordonnée holomorphe au voisinage de c_0, comme $y \circ \pi$ s'annule en chaque point de la fibre de c_0, il existe k tel que $(y \circ \pi)^k f$ soit holomorphe au voisinage de $\pi^{-1}(c_0)$.
Par conséquent, les $\sigma_j((y \circ \pi)^k f)$ sont bornées au voisinage de c_0 et ~~se~~ prolongent donc en fonctions holomorphe au voisinage de c_0.
Par conséquent les $\sigma_j(f)$ sont méromorphes sur Y tout entier.

Maintenant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^*\sigma_k(y) \quad f^{n-k}$
est une équation algébrique de degré au plus n dans $\mathcal{M}(Y)[T]$.

Soit maintenant n_0 le maximum des degrés des polynômes minimaux des éléments de $\mathcal{M}(X)$ dans $\mathcal{M}(Y)[T]$.

$n_0 \leq n$. Soit $g \in \mathcal{M}(X)$ qui réalise ce maximum.

Soit $f \in \mathcal{M}(X)$ et $K = \mathcal{M}(Y)(g,f) \subset \mathcal{M}(X)$

Comme on est en caractéristique nulle, et que K est une extension finie de $\mathcal{M}(Y)$, il existe $h \in K$ tq $K = \mathcal{M}(Y)(h)$.

Comme $\mathcal{M}(Y)(g) \subset \mathcal{M}(Y)(h)$ et $\deg h \leq \deg g$

$K = \mathcal{M}(Y)(g)$ et donc $\mathcal{M}(X) = \mathcal{M}(Y)(g)$.

Si g prend n valeurs distinctes sur les fibres de π, le polynôme minimal de g a au moins n racines distinctes.

Donc $\deg g = n = n_0$

<u>Théorème</u>: Soit K une extension algébrique finie de $\mathcal{M}(Y)$.

Soit g un élément primitif et $P(T) = T^n + c_1 T^{n-1} + \cdots + c_n$ son polynôme minimal (irréductible). ~~Soit~~ avec $c_i \in \mathcal{M}(Y)$.

Alors, il existe une surface de Riemann X et un revêtement ramifié $\pi : X \to Y$ à n feuillets et une fonction méromorphe g sur X telle que $(\pi^* P)(g) = 0$. En particulier

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(Y) \arrow[r, hook] \arrow[dr, bend right, "\pi^*"'] & K = \mathcal{M}(Y)[T]/P \arrow[d] & T \arrow[d, mapsto] \\ & \mathcal{M}(X) & g \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}(X) \simeq K$.

Démonstration

1) Fonctions algébriques locales
2) Globalisation - espace étalé
3) Extension - ramification.

1) <u>Lemme</u> : Soit $c_1 \dots c_n$ des fonctions holomorphes sur le disque $\Delta(R)$ et $w_0 \in \mathbb{C}$ un zéro simple du polynôme $T^n + c_1(0)\,T^{n-1} + \dots + c_n(0)$. Alors, quitte à restreindre $\Delta(R)$ il existe une fonction holomorphe φ sur $\Delta(r)$ telle que $\varphi(0) = w_0$ et $P(\varphi) = 0$.

Dem : Avec $F(x, y) = y^n + c_1(x)\, y^{n-1} + \dots + c_n(x)$

comme $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0, w_0) \neq 0$, c'est le théorème des fonctions implicites.

2) Soit Y' l'ouvert de Y où les c_i sont holomorphes et P n'a pas de racines multiples.

A chaque ouvert U de Y', on associe $\mathcal{O}_P(U) = \{\varphi$ fonctions holo sur U telles que $P(\varphi) = 0\}$.

A chaque $y \in Y'$ on associe la limite inductive

$\mathcal{O}_{P,y} = \varinjlim_{U \ni y} \mathcal{O}_P(U)$ l'ensemble des germes en y de fonctions holomorphes qui satisfont l'équation $P(\varphi) = 0$.

On note $L\mathcal{O}_P$ la réunion disjointe des $(\mathcal{O}_{P,y})_{y \in Y'}$

On munit $L\mathcal{O}_P$ de la topologie la plus fine telle que

$$\forall U, \quad \forall \varphi \in \mathcal{O}_P(U) \qquad \begin{aligned} U &\longrightarrow L\mathcal{O}_P \\ y &\longmapsto \text{germe de } \varphi \text{ en } y \end{aligned}$$

soit continue.

Alors l'application $p : LO_p \longrightarrow Y'$
germe $\longmapsto$ centre du germe

est continue car $U \longrightarrow LO_p \longrightarrow Y'$ est continue
$y \longmapsto y$

Soit $\varphi_y \in LO_p$ φ est un germe en y. Il existe U tel que
$y \in U$ et $\varphi \in \mathcal{O}_p(U)$ tq germe$(\varphi, y) = \varphi_y$

$\{$ germe de φ en z, $z \in U\}$ est un voisinage de φ_y
sur lequel p est un homéomorphisme.

Donc p est un homéomorphisme local.

Par théorème il existe une unique structure de surface de Riemann X' sur LO_p telle que p soit holomorphe

Comme P n'a que des racines simples sur Y', on peut par le lemme local écrire $P(T) = \prod (T - \varphi_i)$
pour des φ_i définis sur un voisinage U de y'.

Donc $p^{X' \to Y'}$ est un revêtement non ramifié

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{ \text{germe de } \varphi_i \text{ en } z,\ z \in U \} \longrightarrow U$$
$$\underset{U}{\overset{\text{homéomorphe}}{\wr\wr}}$$

3/ Pour étendre le revêtement $p : X' \to Y'$ en un revêtement ramifié sur Y tout entier, on démontre

<u>Théorème</u> : Soit X^* une surface de Riemann connexe et $f : X^* \to \Delta^*$ un revêtement holomorphe non ramifié propre du disque épointé Δ^* à n feuillets.
Alors, il existe un biholomorphisme $F : X^* \to \Delta^*$ tel que

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "f"'] & \Delta^* \arrow[d] & z \arrow[d, mapsto] \\ & \Delta^* & z^n \end{tikzcd}$$

<u>Dem</u> : Comme à homéomorphisme près les revêtements finis de Δ^* sont classifiés par les sous groupes d'indice fini de $\pi_1(\Delta^*) = \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[d, "f"] \\ \Delta^* \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \Delta^* \arrow[d] & z \arrow[d, mapsto] \\ \Delta^* & z^n \end{tikzcd}$$

sont homéomorphes

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[dl] \arrow[dd, "\exp(2i\pi z)"] \\ X^* \arrow[dr, "f"'] & \\ & \Delta^* \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \arrow[r, "\exp\left(\frac{2i\pi z}{n}\right)"] \arrow[d, "\exp(2i\pi z)"'] & \Delta^* \arrow[dl] & z \arrow[dl, mapsto] \\ \Delta^* & z^n & \end{tikzcd}$$

Par conséquent, l'homéomorphisme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[dr] & \Delta^* \arrow[d] \\ & \Delta^* \end{tikzcd}$$

est composé de biholomorphismes locaux.

On étend $\begin{array}{ccc} \Delta^* & \longrightarrow & \Delta^* \\ z & \longmapsto & z^n \end{array}$ par $\begin{array}{ccc} \Delta & \to & \Delta \\ z & \mapsto & z^n \end{array}$

4) On pose $g(\varphi) = \varphi(h(\varphi))$.

C'est une fonction holomorphe sur Y' qui satisfait l'équation $P(g)=0$

Comme les c_i sont définis sur Y tout entier, la fonction g est localement bornée au voisinage épointé des points de $X - Y'$. Par conséquent g se prolonge à Y.

<u>Remarque:</u> Si φ est un germe de fonction méromorphe sur Y satisfaisant l'équation algébrique $P(\varphi) = 0$, on dit que $g: X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ est le prolongement analytique maximal de φ. Il n'est bien défini que sur un revêtement de Y.

Fibrés holomorphes en droites complexes

Le but de ce chapitre est de formaliser les constructions de fonctions et de formes méromorphes sur les surfaces de Riemann.

I) Définitions

Soit X une surface de Riemann.

Un fibré holomorphe en droites complexes sur X est la donnée

* d'un recouvrement (U_i) de X par des ouverts de carte
* sur chaque intersection $U_i \cap U_j$ d'une fonction holomorphe g_{ij} partout non nulle vue comme

$$U_i \cap U_j \longrightarrow GL(\mathbb{C})$$

vérifiant sur $U_i \cap U_j \cap U_k$ $\qquad g_{ik} = g_{ij}\, g_{jk}$

Avec ces données, on construit

$$L = \coprod_i U_i \times \mathbb{C} \Big/ \underset{\substack{\uparrow \\ U_i \times \mathbb{C}}}{(x,z)} \sim \underset{\substack{\uparrow \\ U_j \times \mathbb{C}}}{(x',z')} \iff x = x' \text{ et } z = g_{ij}(x)\, z'$$

$$\begin{array}{ccc} L & & (x,z) \\ \pi \big\downarrow & & \big\downarrow \\ X & & x \end{array}$$

Le recouvrement $(U_i \times \mathbb{C})$ avec les cartes $\begin{array}{l} U_i \times \mathbb{C} \longrightarrow V_i \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^2 \\ (x, z) \longmapsto (\varphi_i(x), z) \end{array}$

et les changements de carte
$$\begin{array}{rcl} \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} \\ (z_i, z) & \longmapsto & \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(z_i),\ g_{ji}(\varphi_i^{-1}(z_i)) \end{array}$$

fait de L une variété complexe de dimension 2,
avec changement de carte linéaire par rapport à la seconde variable.
Les fibres de π ont ainsi une structure d'espace vectoriel bien définie.

Réciproquement, si L est une variété complexe de dimension 2

* muni d'une application $\pi : L \to X$
* d'un recouvrement U_i de X par des ouverts de cartes
* de trivialisation continu holomorphe $\pi^{-1}(U_i) \simeq U_i \times \mathbb{C}$
  dont les changement de trivialisation sont $\mathbb{C}$-linéaires par rapport à la seconde variable,

alors L est un fibré holomorphe en droites complexes

Deux fibrés holomorphes en droites complexes (U_i, g_{ij}) et (U'_i, g'_{ij}) sont isomorphes, s'il existe

* un recouvrement $\mathcal{U}_i$ plus fin que U_i et U'_i
* sur chaque ouvert $\mathcal{U}_i$ une application holomorphe partout non nulle ε_i

tels que sur $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ $\qquad \varepsilon_i\, g_{ij}\, \varepsilon_j^{-1} = g'_{ij}$

L'isomorphisme de (U_i, g_{ij}) et (U'_i, g'_{ij}) correspond

à l'existence * d'un biholomorphisme
$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\pi"'] & & L' \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

* d'un recouvrement trivialisant (U_i) de X sur lequel ε est linéaire par rapport à la seconde variable.

Une <u>section</u> holomorphe s d'un fibré en droites (U_i, g_{ij}) est la donnée sur chaque ouvert U_i d'une fonction holomorphe σ_i telle que sur $U_i \cap U_j$ $\qquad \sigma_i = g_{ij}\, \sigma_j$

Cette donnée correspond à la donnée d'une application holomorphe s telle que
$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, "\pi"'] \\ X \arrow[u, bend right, "s"'] \end{tikzcd} \qquad \pi \circ s = Id_X .$$

On note $H^0(X, L)$ l'espace vectoriel des sections holomorphes de L.

<u>Exemples</u> : * $(X, 1) = (U_i, g_{ij})$ $\qquad L = \underline{\mathbb{C}}$

Les sections holomorphes de $\underline{\mathbb{C}}$ sont les fonctions holomorphes sur X

* $U_i, \ \dfrac{d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})}{d z_i}$ $\qquad L = \Omega^1_X$

Les sections holomorphes de Ω^1_X sont les 1-formes holomorphes

* ~~Soit~~

<u>Opérations</u> : * les cocycles $g_{ij}\ g'_{ij}$ définissent $L \otimes L'$

* Les cocycles g_{ij}^{-1} définissent L^*. (propre aux fibrés en droites)

En particulier $\qquad L \otimes L^* \simeq \underline{\mathbb{C}}$

Diviseurs

<u>Def</u> : Une $\mathbb{Z}$-combinaison linéaire de points de X est un <u>diviseur</u> sur X.
(Les points sont les sous ensembles analytiques de codimension 1).

<u>Proposition</u> : Sur toute surface de Riemann, on peut associer à chaque diviseur D une classe d'isomorphisme de fibré en droites holomorphes notée $[L_D]$.

<u>Dem</u> : Pour un recouvrement de X par des ouverts de carte U_i, il existe une fonction méromorphe f_i sur U_i telle que

$$\operatorname{div} f_i = \sum_{p_i \text{ zéros de } f} p_i - \sum_{q_j \text{ pôles de } f} q_j = D \cap U_i .$$

On dit que f_i est une équation locale de D sur U_i.
On obtient le fibré de donnée de cocycle $\left(U_i , \ g_{ij} = \frac{f_i}{f_j} \ \text{partout non nulle sur } U_i \cap U_j \right)$
Pour un autre atlas de X, on obtient un fibré isomorphe.

<u>Remarques</u>. * Les sections s de L_D vérifient $\sigma_i = \frac{f_i}{f_j} \sigma_j$
Les données ~~f~~ $\frac{\sigma_i}{f_i}$ donnent donc une fonction ~~holomorphe~~ u_s telle que $\operatorname{div} u_s + D \geq 0$
autrement dit, si $D = \sum n_i p_i - \sum m_j q_j$ $\quad n_i \geq 0 \quad m_j \geq 0$
les sections holomorphes de L_D correspondent aux fonctions méromorphes sur X avec des pôles seulement en p_i d'ordre inférieur à n_i et des zéros au moins en q_j de multiplicité au moins m_j.

* Comme g_{ij} est partout non nul, pour tout fibré et toute section on définit $U_i \cap (\operatorname{div}_L s) = \operatorname{div} \sigma_i$.

* $\operatorname{div}_{L_D} s = \operatorname{div} u_s + D$.
* L'application $D \xrightarrow{\lambda} [L_D]$ est un morphisme de groupes

~~Définition~~ :

Soit $D \in N(\lambda)$. Il existe un recouvrement ouvert (U_i) de X et des fonctions holomorphes ε_i partout non nulle sur U_i telles que sur $U_i \cap U_j$

$$\varepsilon_i \frac{f_i}{f_j} \varepsilon_j^{-1} = 1 .$$

La donnée $(U_i, f_i \varepsilon_i)$ construit une fonction méromorphe sur X dont le diviseur est D. ~~Réciproquement, le~~ diviseur d'une fonction méromorphe est dans $N(\lambda)$

<u>Def</u> : * Un diviseur D est dit principal s'il est le diviseur des zéros d'une fonction méromorphe sur X.

* Le ~~[illegible]~~ groupe abélien $\mathrm{Div}(X) / \mathrm{Div\ principaux}(X)$ est appelé groupe de Picard de X.

<u>Prop</u> : Sur une surface de Riemann $\mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\hat{\lambda}}$ Groupe des classes d'isomorphisme de Fibrés en droites $H^1(X, \mathcal{O}^*)$

<u>Dem</u> : * On a vu que λ est bien définie sur $\mathrm{Pic}(X)$ et injective.

* Si $s \in \mathcal{M}(X, L)$ alors $L \simeq L_{\mathrm{div}_L s}$

* <u>Théorème</u> (Admis) Sur une surface de Riemann, tout fibré en droites admet une section méromorphe.

on peut définir $\mathrm{div}_L\, s$.

Attention, si $s \in H^0(X, L_D)$ correspond à $\sigma \in \mathcal{M}(X)$

alors $\mathrm{div}_L\, s = \mathrm{div}\, \sigma + D \geq 0$.

Degré : * Si X est compacte Le degré d'un diviseur D est la $\sum n_i$.

Après la conséquence * Si $s, s' \in \mathcal{M}(X, L)$ alors $\frac{s}{s'}$ est une fonction méromorphe.

Si X est compacte, $\deg \mathrm{div}\left(\frac{s}{s'}\right) = 0$.

Donc $\deg \mathrm{div}_L\, s = \deg \mathrm{div}_{L'}\, s' =: \deg L$. | Rem : Si L a une section $\deg L \geq 0$.

Par exemple, $\deg \underline{\mathbb{C}} = 0$ et $\deg \Omega^1_X = 2g-2$.

* $\deg L \otimes L' = \deg L + \deg L'$.

(admis, dem analogue à l'existence de fonction méromorphe)

Théorème : Tout fibré en droites holomorphe sur une surface de Riemann compacte possède ~~une~~ section méromorphe.

Conséquence : Si $s \in \mathcal{M}(X, L)$ alors $L \simeq L_{\mathrm{div}_L s}$

Conséquence : Tout fibré en droites L sur une surface de Riemann compacte est isomorphe à un fibré en droites défini par un diviseur D.

Dem : Soit $s \in \mathcal{M}(X, L)$ et $D = \mathrm{div}_L\, s$

Soit U_i un recouvrement de X qui trivialise L

$$L|_{U_i} \simeq U_i \times \mathbb{C} \xrightarrow{\varepsilon_i} U_i \times \mathbb{C} \simeq L_D|_{U_i}$$

$$(x, z) \longmapsto (x, z) \longrightarrow$$

cocycle de L

$$\varepsilon_i\, g_{ij}\, \varepsilon_j^{-1} = \frac{\sigma_i}{\sigma_j} \quad \text{cocycle de } L_D$$

On dit que deux diviseurs sont linéairement équivalents s'ils diffèrent par le diviseur d'une fonction méromorphe (i.e. un diviseur principal) s'il existe une fonction ~~rationnelle~~ méromorphe telle que $D = D' + (s)$.

C'est équivalent au fait que D et D' sont deux diviseurs de sections méromorphes d'un même fibré ou encore que $L_D \simeq L_{D'}$.

En effet, si $s \in \mathcal{M}(L)$ alors $L \simeq L_{\mathrm{div}_L D}$ -

et $1 \in \mathcal{M}(X, L_D)$ avec $\mathrm{div}_{L_D} 1 = D$.

<u>Degré</u>

Reformulation du théorème de Riemann-Roch.

* Si L est un fibré en droites sur une surface de Riemann et ~~$\deg L$~~

alors $h^0(X, L) - h^0(X, \Omega^1_X \otimes L^*) = \deg L + 1 - g$

* Si $\deg L < 0$, L n'a pas de section holomorphe non nulle.
* En particulier, si $\deg L \geq g$ ~~$h^0(X,L)$~~

L a une <u>section holomorphe</u> non nulle et $L = L_D$ avec $D \geq 0$.

Tout diviseur de degré au moins g est linéairement équivalent à un diviseur effectif.

* Si $\deg L > 2g-2$ alors $\deg(\Omega^1_X \otimes L^*) < 0$ et donc

$h^0(X, L) = \deg L + 1 - g$

Plongement projectif d'une surface de Riemann compacte

Théorème : Soit L un fibré en droites holomorphe sur une surface de Riemann compacte X.

* Si $\deg L > \deg \Omega^1_X + 1 = 2g-1$, pour tout $x \in X$ $H_x = \{ s \in H^0(X,L) \ / \ s(x) = 0 \}$ est un hyperplan de $H^0(X,L)$.

* Si $\deg L > \deg \Omega^1_X + 2 = 2g$, l'application

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Phi_L} & \mathbb{P}(H^0(X,L)) \\ x & \longmapsto & H_x \end{array}$$

est un plongement.

Dem : * Si $\deg L > \deg \Omega^1_X + 1$ $\qquad \deg L \otimes L_{-x_0} > \deg \Omega^1_X$

donc $h^0(X,L) = \deg L + g - 1$

$h^0(X, L\otimes L_{-x_0}) = \deg L - 1 \ + g - 1$

En particulier, il existe une section de L qui n'est pas dans $H^0(X, L\otimes L_{-x_0})$ (quand on identifie cet espace avec l'espace des section holomorphe de L qui ont un zéro en x_0).

* Soit x_0 et x_1 deux points distincts dans X.

$H^0(X, L\otimes L_{-x_0})$ s'identifie à l'espace des sections de L nulles en x_0

$H^0(X, L\otimes L_{-x_0-x_1})$ en x_0 et en x_1

Par dimension, il existe une section nulle en x_0 qui n'est pas nulle en x_1

Donc Φ_L est injective.

$H^0(X, L\otimes L_{-2x_0})$ s'identifie à l'espace des sections de L nulles en x_0 et de différentielle nulle en x_0 (lue dans une trivialisation)

Soit $s_2, \dots s_N$ une base de $H^0(X, L\otimes L_{-2x_0})$ et $s_1 \in H^0(X, L\otimes L_{-x_0}) - H^0(L\otimes L_{-2x_0})$

et $s_0 \in H^0(X,L) - H^0(X, L\otimes L_{-x_0})$

$$H^0(X,L) \supset H^0(L\otimes L_{-x_0}) \supset H^0(X, L_{-2x_0})$$

Soit $X_0 \dots X_N$ des coordonnées dans $H^0(X,L)$ relativement à cette base.

H_x est défini par $\sum_{i=0}^{N} X_i \; \sigma_i(x) = 0$

H_{x_0} —— —— $X_0 \; \sigma_0(x_0) = 0$ soit $X_0 = 0$

Donc ϕ s'écrit $\phi(x) = [\sigma_0(x) : \dots : \sigma_N(x)]$

$\phi(x_0) = [1 : 0 \text{ —— } 0]$

Comme $\sigma_1'(x_0) \neq 0$ la différentielle de $\phi : T_{x_0}X \to T\mathbb{P}^N$

est injective.

Autour du théorème d'Abel

On cherche à caractériser les diviseurs principaux sur les surfaces de R compactes.

Ils sont de degré nul.

Def : Une fonction méromorphe multiplicative Φ sur X est une fonction méromorphe non nulle sur $\tilde{X}$ telle qu'il existe une représentation $r : \pi_1(X,a) \to U_1(\mathbb{C})$ telle que $\forall z \in \tilde{X}$ $\forall \gamma \in \pi_1(X,a)$ $\Phi(z+\tilde{\gamma}) = r(\gamma)\Phi(z)$

Théorème : 1/ Tout diviseur de degré nul est le diviseur d'une fonction méromorphe multiplicative

2/ Une fonction méromorphe multiplicative est caractérisée à constante multiplicative près par son diviseur.

Corollaire : 1/ A tout diviseur D de degré nul, on peut associer une représentation unitaire r_D

2/ Un diviseur D de degré nul est principal ssi la représentation r_D est triviale, plus généralement la représentation r_D caractérise D à équivalence linéaire près.

Démonstration du théorème

2/ Si Θ et Θ' sont deux fonctions méromorphes multiplicatives, de même diviseur $f := \frac{\Theta}{\Theta'}$ est une fonction holomorphe multiplicative.

$\log |f| = \operatorname{Re}(\log f)$ est une fonction harmonique sur X donc constante.

1/ Si $D = p - q$, on va construire sur X l'analogue de $\frac{z-p}{z-q} = e^{\log \frac{z-p}{z-q}}$

Soit donc R_{pq} la fonction harmonique sur X comparable à $\frac{1}{2\pi} \operatorname{re} \log(z-p)$ au voisinage de p et $-\frac{1}{2\pi} \operatorname{re} \log(z-q)$ au voisinage de q

$\rho_{pq} = d R_{pq} + i (d R_{pq})^* \sim \frac{1}{2\pi} \frac{dz}{z-p} - \frac{1}{2\pi} \frac{dz'}{z'-q}$

et ω_{pq} une fonction méromorphe sur $\tilde{X}$ telle que $\pi^* \rho_{pq} = d\omega_{pq}$ à valeurs ds $\mathbb{C}/\mathbb{Z}i$

On pose $\Theta(z) = \Theta_{pq}(z) = e^{2\pi \omega_{pq}(z)}$ bien définie

$\Theta \sim \frac{1}{2\pi}(z-p)$ au voisinage de p

$\operatorname{div} D = p - q$

$\Theta(z + \tilde{\gamma})$

$$\omega_{pq}(z+\tilde{\gamma}) - \omega_{pq}(z) = \int_{\tilde{\gamma}} d\omega_{pq}(z) = \int_{\tilde{\gamma}} \pi^* \rho_{pq} = \int_{\gamma} \rho_{pq} = i \int_{\gamma} (dR_{pq})^*$$

est imaginaire pur.

Donc Θ_{pq} est multiplicative pour la représentation

$$\pi_1(X,a) \longrightarrow U(1)$$
$$\gamma \longmapsto e^{2i\pi \int_{\gamma} (dR_{pq})^*}$$

On peut rendre plus explicite le critère précédent en reprenant les formules de symétrie pour les périodes. Ici, en notant w_γ la forme holomorphe associée à la classe d'homologie $[\gamma]$ du lacet γ,

$$2i\pi \int_\gamma (dR_{pq})^* \equiv 2i\pi \, \mathrm{re}\left(\int_p^q w_\gamma\right) \qquad [2i\pi]$$

On considère une base $[\gamma_k]$ de l'homologie telle que $(\gamma_k)_{k=1}^{2g}$ engendre l'homologie.

<u>Théorème d'Abel</u> On fixe un point $a \in X$.

Les points $p_1 \dots p_n$ sont les zéros et les points $q_1 \dots q_n$ sont les pôles d'une fonction méromorphe sur X si et seulement si

$$\forall\ k = 1, \dots, 2g \qquad \sum_{i=1}^n \mathrm{re} \int_a^{p_i} w_{\gamma_k} \equiv \sum_{i=1}^n \mathrm{re} \int_a^{q_i} w_{\gamma_k} \qquad [1]$$

Morphisme d'Albanese. On fixe

~~On choisit g éléments parmi les 2g~~ $(W_k)_{k=1}^{g}$ qui forment une $\mathbb{C}$-base de $H^0(\Omega^1_X)$

A tout point x de X on associe le vecteur

$$\begin{pmatrix} \int_a^x w_1 \\ \vdots \\ \int_a^x w_g \end{pmatrix} \quad \text{de} \quad \mathbb{C}^g/\Lambda$$

où Λ est le sous groupe de $\mathbb{C}^g$ engendré par les $2g$ vecteurs

$$\begin{pmatrix} \int_{\gamma_k} w_1 \\ \int_{\gamma_k} w_2 \\ \vdots \\ \int_{\gamma_k} w_g \end{pmatrix} \qquad k = 1 \dots 2g$$

On obtient une application $\alpha : X \longrightarrow \mathbb{C}^g/\Lambda$

bien définie, holomorphe de différentielle

$$d\alpha_{x_0} : T_{x_0} X \longrightarrow \mathbb{C}^g$$
$$v \longmapsto \begin{vmatrix} w_1(x_0)\cdot v \\ \vdots \\ w_g(x_0)\cdot v \end{vmatrix}$$

a) Si $g = 1$, comme $\deg \Omega^1_X = 0$, on choisit (w) $\mathbb{C}$-base de $H^0(\Omega^1_X)$ w_* ne s'annule pas

et α est donc une application non constante, non ramifiée, propre

de X dans $\mathbb{C}/\Lambda$. ~~Si $\alpha(p) = \alpha(q)$~~

$$\cancel{\int_a^p w_1 \equiv \int_a^q w_1} \quad \cancel{\left[\int_{\gamma_1} w_*, \int_{\gamma_2} w_*\right]}$$

~~$\mathrm{Int}(\gamma_1, \gamma_1)$ $\mathrm{Int}(\gamma$~~

Il existe $(\rho_1, \rho_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que $w_1 = \rho_1 w$ et $w_2 = \rho_2 w$

Il y a donc une transformation $\mathbb{R}$-linéaire inversible $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ qui envoie

$$\int_{\gamma_1} w \longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Re} \int_{\gamma_1} w_1 \\ \mathrm{Re} \int_{\gamma_1} w_2 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\gamma_2} w \longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Re} \int_{\gamma_2} w_1 \\ \mathrm{Re} \int_{\gamma_2} w_2 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda \longmapsto P \quad \text{réseau des périodes}$$

* On en déduit que Λ est un réseau dans $\mathbb{C}$ et que $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ correspond à un réseau Λ_0 plus fin que Λ

Si $\alpha(p) = \alpha(q)$ $\quad \int_a^p w \equiv \int_a^q w \quad [\Lambda]$

Donc $\quad \mathrm{Re} \int_a^p w_1 \equiv \mathrm{Re} \int_a^q w_2 \quad [P]$

$\quad \mathrm{Re} \int_a^p w_2 \equiv \mathrm{Re} \int_a^q w_2 \quad [P]$

Par le théorème d'Abel, il existe une fonction méromorphe sur X de diviseur $p - q$.
donc une application holomorphe non ~~nul~~ constante $X \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$. Impossible.

Donc α est injective. C'est donc un isomorphisme.

On trouve aussi que $P = \mathbb{Z}^2$.

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{C}/\Lambda_0 \\ & \overset{\text{inj}}{\underset{\text{(Abel)}}{\nearrow}} & \uparrow \text{injective} \\ X & \xrightarrow[\text{surj}]{} & \mathbb{C}/\Lambda \end{array}$$

b) En genre $g \geq 2$, le morphisme d'Albanese est une immersion.

$1 = h^0(\mathbb{C}) = h^0(L_{x_0}) = h^0(\Omega^1_X \otimes L_{-x_0}) + 1 + 1 - g \qquad$ Donc $H^0(\Omega^1_X \otimes L_{-x_0}) \subsetneq H^0(\Omega^1_X)$

donc $d\alpha$ est partout non nulle.

α est injective par le théorème d'Abel.

On considère l'application

$$\begin{array}{ccc} X^g & \xrightarrow{j} & \mathbb{C}^g/\Lambda \\ (p_1, \dots p_g) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^{g} \int_a^{p_m} w_1 \\ \\ \sum_{m=1}^{g} \int_a^{p_m} w_g \end{pmatrix} \end{array}$$

Comme les périodes $\mathrm{Re} \int_{\gamma_i} w_j = \mathrm{Int}(\gamma_i, \gamma_j)$ sont entières,

par le théorème d'Abel, si $j(\sum p_i) = j(\sum q_i)$

alors $\sum p_i$ est linéairement équivalent à $\sum q_j$ -

Mais comme en général ~~un diviseur de degré g n'est pas réalisable comme~~ il n'y a pas de fct méromorphe avec des pôles en $\sum_{j=1}^{g} q_j$, j est génériqument injective.

Le problème d'inversion consiste à montrer que cette application est surjective.

On peut montrer qu'en au moins un point de X^g la différentielle de j est inversible. Comme X^g et $\mathbb{C}^g/\Lambda$ ~~ont~~ même dimension et que $\mathbb{C}^g/\Lambda$ est compact connexe j est surjective.