Université de Paris-Sud Orsay — Année universitaire 2009-2010

M2, Surfaces de Riemann, Feuille 8

Surfaces hyperelliptiques

Soit X une surface de Riemann compacte de genre g. On suppose dans cette partie que X est hyperelliptique, c'est à dire qu'il existe une application holomorphe $f : X \to \mathbb{P}^1$ de degré 2.

1) Vérifier que f possède exactement $N = 2g + 2$ points de ramification $P_1, \ldots, P_N$.

On rappelle que la surface X possède une équation affine $y^2 = \prod_{i=1}^{N'}(x - a_i)$, où $N' \in \{N, N-1\}$. La coordonnée x, restreinte à X, s'identifie à $f : X \to \mathbb{P}^1$, les $a_i \in \mathbb{C}$ sont alors les valeurs critiques $f(P_i)$. Le produit comporte $N - 1$ termes lorsque ∞ est une valeur critique (prendre par exemple $f = \wp$ sur un tore). La coordonnée y, restreinte à X, est une carte locale de X au voisinage des points de ramification P_i.

2) Montrer que $P_1, \ldots, P_N$ sont des points de Weierstrass hyperelliptiques. En déduire que l'ensemble $\mathcal{W}$ des points de Weierstrass de X est égal à $\{P_1, \ldots, P_N\}$.

3) Réciproquement, soit X une surface de Riemann compacte de genre g. Montrer que si $\mathsf{Card}\ \mathcal{W} = 2g + 2$ alors tous les points de Weierstrass sont hyperelliptiques, et X est hyperelliptique.

On déduit de 2) la proprosition suivante :

4) Soient $f, g : X \to \mathbb{P}^1$ deux applications holomorphes de degré 2. Alors il existe une homographie H de $\mathbb{P}^1$ telle que $f = H \circ g$.

Cela entraîne :

5) Il existe un unique automorphisme J de X qui fixe au moins 5 points, cet automorphisme est une involution (on pourra considérer f et $f \circ J$). On appelle cet automorphisme l'*involution hyperelliptique*.

Automorphismes en genre $g \geq 2$

Soit X une surface de Riemann compacte de genre g.

5) Montrer qu'un automorphisme $\varphi : X \to X$ différent de l'identité possède au plus $2g + 2$ points fixes. On pourra considérer $P \in X$ non fixé par φ et introduire une fonction méromorphe non constante $f \in \mathcal{L}((g+1)[P])$.

On suppose dans toute la suite que $g \geq 2$.

Théorème (Schwarz) : *Le groupe $Aut(X)$ est fini.*

6) Etablir ce théorème. On pourra considérer l'action de $Aut(X)$ sur l'ensemble des points de Weierstrass de X.

Nous montrons maintenant le résultat plus précis :

Théorème (Hurwitz) : *$\mathsf{Card}\ Aut(X) \leq 84(g - 1)$.*

On munit X/G de la structure quotient usuelle. On note g' le genre de X/G.

7) Soient $(a_1, \ldots, a_k)$ les valeurs critiques de $\pi : X \to X/G$, et $n = \mathsf{Card}\ Aut(X)$. Montrer la formule :

$$2g - 2 = n(2g' - 2) + n \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{\nu_j}\right),$$

où ν_j est le cardinal du stabilisateur d'un point de $\pi^{-1}(a_j)$.

8) Vérifier que si $g' \geq 2$ alors $N \leq g - 1$, et que si $g' = 1$ alors $N \leq 4(g-1)$. Lorsque $g' = 0$, il s'agit d'étudier $\sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{\nu_j}\right) - 2$, où $\nu_i \geq 2$.

9) Montrer que si cette quantité est > 0, alors elle est supérieure à $1/42$ (observer que $k \geq 3$, traiter $k \geq 5$ et $k = 4$, et enfin le cas $k = 3$).

10) Conclure.