Université de Paris-Sud Orsay Année universitaire 2009-2010

M2, Surfaces de Riemann, feuille 7

Soit X une surface de Riemann compacte de genre g et $P \in X$. On note :

$\mathcal{L}_n := \mathcal{L}(n[P]) = \{0\} \cup \{f$ méromorphe sur X, non identiquement nulle, et $(f)+n[P] \geq 0\}$.

C'est le sous-espace des fonctions méromorphes sur X ayant un unique pôle en P, d'ordre *au plus* n. Nous nous intéressons aux valeurs de n pour lesquelles il existe une fonction méromorphes dans $\mathcal{L}_n$ dont le pôle en P est d'ordre *exactement* n. On définit pour cela :

$$\Gamma(P) := \{n \geq 1 \ , \ \exists f \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}\} \quad , \quad \mathcal{T}(P) := \mathbb{N}^* \setminus \Gamma(P).$$

Proposition A : *Card $\mathcal{T}(P) = g$. Notons pour $g \geq 1$: $\mathcal{T}(P) = \{n_1, \ldots, n_g\}$, où la suite $(n_i)_i$ est croissante. On a alors :*

$$1 = n_1 < n_2 \ldots < n_g \leq 2g - 1.$$

On note $\mathcal{O}_n$ (resp. Ω_n) le faisceau des fonctions (resp. différentielles) méromorphes sur X, dont le diviseur est plus grand que $-n[P]$. On a $H^0(\mathcal{O}_n) = \mathcal{L}_n$, notons $l_n := \dim \mathcal{L}_n$. On rappelle que $H^0(\Omega_{-n}) \simeq H^1(\mathcal{O}_n)^*$.

1) Expliciter les flèches de la suite exacte : $0 \to \mathcal{O}_{n-1} \to \mathcal{O}_n \to \mathbb{C}_P \to 0$.

2) Montrer que $0 \leq l_n - l_{n-1} = 1 + h^0(\Omega_{-n}) - h^0(\Omega_{-(n-1)}) \leq 1$.

3) En déduire que les assertions suivantes sont équivalentes :
- $n \in \Gamma(P)$,
- $l_n - l_{n-1} = 1$,
- il n'existe pas de différentielle holomorphe sur X ayant en P un zéro d'ordre $n-1$.

4) Montrer que $l_n = n + 1 - g$ pour tout $n \geq 2g - 1$.

5) En déduire la proposition A.

Définition : *P est un point de Weierstrass si il existe une fonction méromorphe sur X avec un unique pôle en P d'ordre inférieur ou égal à g. Autrement dit, P est un point de Weierstrass si il existe $i \in \{1, \ldots, g\}$ tel que $n_i \neq i$. On définit le poids de P par $w(P) = \sum_{i=1}^{g}(n_i - i)$. On dit que P est un point hyperelliptique si $2 \in \Gamma(P)$.*

6) Vérifier $\mathcal{T}(P) = \{1, 3, \ldots, 2g-1\}$ et $w(P) = g(g-1)/2$ si P est hyperelliptique.

Nous montrons la caractérisation suivante :

Proposition B : *P est hyperelliptique si et seulement si $w(P) = g(g-1)/2$.*

7) Vérifier que l'on a : $w(P) = \sum_{n=1}^{2g-2} l_n - g(g+1)/2 + 1$.

8) Vérifier que $l_n > 1+[n/2]$ entraîne $\mathcal{T}(P) \subset \{1, \ldots, n\}$. En déduire que $l_n > 1+[n/2]$ implique $n > 2g$.

9) Montrer que si P n'est pas hyperelliptique, alors $w(P) < g(g-1)/2$ (cf 7 et 8).

Nous estimons à présent le nombre de points de Weierstrass sur la surface X.

Théorème C : $\sum_{P\in X} w(P) = g(g^2-1)$. *En particulier, le nombre N de points de Weierstrass de X vérifie :*

$$2g+2 \leq N \leq g(g^2-1).$$

La preuve va utiliser la notion de forme différentielle holomorphe de degré $q \geq 1$. Une telle forme s'écrit localement $\omega = f(z)(dz)^q$, où f est une fonction holomorphe. Si $\omega = g(t)(dt)^q$ est une autre expression de ω, alors $g(t) = f(z(t))z'(t)^q$. On note $\Omega^q(X)$ l'espace des formes holomorphes de degré q.

On vérifie facilement que si η est une forme différentielle holomorphe sur X d'expressions locales $\eta = f_i(z)dz$, alors la collection $f_i(z)^q(dz)^q$ définit une forme différentielle de degré q sur X.

10) Soit $\omega \in \Omega^q(X)$. Montrer que $\deg(\mathsf{div}\,\omega) = q(2g-2)$.

La démonstration du théorème C consiste à construire une forme différentielle holomorphe de degré $q = g(g+1)/2$ sur X, de diviseur $D = \sum_{P\in X} w(P)\cdot[P]$. Soient $(\eta_1,\dots,\eta_g) \in \Omega(X)^g$ et considérons leurs expressions locales $(f_1(z)dz,\dots,f_g(z)dz)$ sur un ouvert U de X. On pose

$$\forall z \in U\ ,\ g(z) = \det[(f_i^{(j)}(z))] \text{ où } 1 \leq i \leq g \text{ et } 0 \leq j \leq g-1.$$

11) Montrer que l'expression $g(z)(dz)^q$ définit une forme différentielle holomorphe sur X de degré $q = g(g+1)/2$. On la note $W(\eta_1,\dots,\eta_g)$.

12) Montrer que pour tout $(\eta_1,\dots,\eta_g) \in \Omega(X)^g$ et $(\eta'_1,\dots,\eta'_g) \in \Omega(X)^g$, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $W(\eta'_1,\dots,\eta'_g) = \alpha \cdot W(\eta_1,\dots,\eta_g)$.

Considérons à présent P un point de Weierstrass et $\mathcal{T}(P) = \{n_1,\dots,n_g\}$ la suite des trous en P. Soient $\zeta_i \in \Omega(X)$ ayant pour seul zéro P, d'ordre égal à $n_i - 1$ (cf 3)).

13) Montrer que l'ordre de $W(\zeta_1,\dots,\zeta_g)$ en P est égal à $w(P)$.

14) Montrer que pour tout $Q \in X$, l'ordre de $W(\zeta_1,\dots,\zeta_g)$ en Q est égal à $w(Q)$.

15) En déduire le théorème C.