Université de Paris-Sud Orsay — Année universitaire 2009-2010

Maîtrise de Mathématiques M2, Surfaces de Riemann

Feuille 7

La formule de Riemann-Hurwitz

Nous montrons la formule suivante :

Théorème : *Soient $f : X \to Y$ une application holomorphe (non constante) entre surfaces de Riemann compactes. On note g_X et g_Y les genres de X et Y. Alors*

$$2g_X - 2 = n(2g_Y - 2) + \sum_{x \in X}(e_x(f) - 1),$$

où n est le degré de f et $e_x(f)$ est l'indice de ramification de f en x.

On commence par rappeler la définition du degré de f. On montre plus précisément que f est un revêtement ramifié fini, c'est à dire :

(a) f possède un nombre fini de points de ramifications $x_1, \ldots, x_k$.

(b) En dehors des fibres $f^{-1}(f(x_i))$, f définit un revêtement à fibres finies.

(c) Pour tout $y \in Y$, on a $\sum_{f(x)=y} e_x(f) = n$, où n est le cardinal d'une fibre générique.

On démontre maintenant la formule de Riemann-Hurwitz. On rappelle que le genre d'une surface de Riemann compacte S vérifie $2 - 2g = S - A + F$, où S, A, F désignent le nombre de sommets, arêtes et faces d'une triangulation de S.

On reprend les notations de (a), (b) et (c). On triangule Y de sorte que tout point $f(x_1), \ldots, f(x_k)$ soit un sommet. On peut supposer que tout triangle est inclus dans un disque au dessus duquel f s'écrit $z \mapsto z^k$. On relève cette triangulation à X.

1) Montrer que $A_X = nA_Y$ et $F_X = nF_Y$.

2) Montrer que $S_X = nS_Y - \sum_{x \in X}(e_x(f) - 1)$.

3) Conclure.

La formule du genre d'une courbe plane

Soit $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ un polynôme homogène irréductible de degré n. On note $\mathcal{C}$ la courbe que définit P dans $\mathbb{CP}^2$, et g le genre de cette courbe.

Théorème (Formule du genre) : *Si $\mathcal{C}$ est lisse, alors $g = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.*

On propose une démonstration basée sur la formule de Riemann-Hurwitz. On identifie $\mathbb{C}^2$ avec $\{[x : y : 1], (x, y) \in \mathbb{C}^2\}$ et on note $\mathcal{L}_\infty := \{Z = 0\}$ la droite à l'infini. Soient $p := [0 : 1 : 0]$ et π la projection de centre p sur la droite $\mathcal{S} := \{Y = 0\}$

1) Vérifier que la restriction de π à $\mathbb{C}^2$ s'écrit $(x, y) \mapsto x$.

Nous allons appliquer la formule de Riemann-Hurwitz à $\pi_{|\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$. D'après la question précédente, l'ensemble des points de ramification de $\pi_{|\mathcal{C}}$ coincide avec $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$, où

$\mathcal{C}' := \{\partial_Y P = 0\}$. Quitte à utiliser un changement de coordonnées linéaire, nous pouvons supposer que $p \notin \mathcal{C}$, $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \cap \mathcal{L}_\infty = \emptyset$ et $\deg P = \deg_Y P$.

Soit $m \in \mathcal{C}$ et $\zeta \mapsto (x(\zeta), y(\zeta))$ une paramétrisation locale de $\mathcal{C}$ en m. On définit le degré de ramification local $(C \cdot C')_m$ comme l'ordre de la fonction $\zeta \mapsto \partial_Y P(x(\zeta), y(\zeta))$ au point $\zeta = 0$. On pose $\mathcal{C} \cdot \mathcal{C}' := \sum_{m \in \mathcal{C}} (C \cdot C')_m$.

Nous montrons à présent :

Théorème (Bezout) : *On a $\mathcal{C} \cdot \mathcal{C}' = nn'$, où n est le dégré de $\mathcal{C}$ et n' celui de $\mathcal{C}'$.*

2) Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathbb{P}^2$ d'équation L. Montrer que $(\mathcal{D} \cdot \mathcal{C}') = n'$.

Soit $(\mathcal{D}_i)_{1 \leq i \leq n}$ n droites de $\mathbb{P}^2$ d'équations $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$. On note $\varphi := P / \prod_{1 \leq i \leq n} L_i$. Observer que c'est une fonction méromorphe sur $\mathbb{P}^2$.

3) Calculer le degré du diviseur de $\varphi_{|\mathcal{C}'}$ et en déduire le théorème de Bezout.

4) Etablir la formule du genre.