Université de Paris-Sud Orsay Année universitaire 2009-2010

M2, Surfaces de Riemann, Feuille 6 - suite.

L'invariant modulaire J

On rappelle que pour $\tau \in \mathcal{H}$, $\wp_\tau'^2 = Q_\tau(\wp_\tau)$, où $Q_\tau(X) = 4X^3 - g_2(\tau)X - g_3(\tau)$. La fonction $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ est une forme modulaire de poids 6. On note $J := g_2^3/\Delta$ et G le groupe modulaire défini par $G = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm \mathrm{Id}\}$.

1) Vérifier que J est une fonction modulaire de poids 0, qu'elle est holomorphe sur $\mathcal{H}$ et a un pôle simple à l'infini.
En particulier, J définit une application holomorphe $\tilde{J} : \mathcal{H}/G \to \mathbb{C}$, où l'on munit $\mathcal{H}/G$ de la structure d'espace quotient analytique.

2) Montrer que $\tilde{J}$ est une bijection. Ainsi, $\mathcal{H}/G$ est conformément équivalent à $\mathbb{C}$.

3) Vérifier que $J(\rho) = 0$ et $J(i) = 1$. Montrer que J prend des valeurs réelles sur l'axe imaginaire et la frontière de $\mathcal{D}$.

En guise d'application, on se propose d'établir le :

Théorème de Picard : *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Si f évite deux points distincts a et b, alors f est constante.*

4) Vérifier que l'on peut se ramener à $\{a, b\} = \{0, 1\}$.

5) Relever f à sous-ensemble de $\mathcal{H}$ et conclure.